教育学部での数学の授業から

― 位相空間について ―

Mathematics for prospective teachers in faculty of education
- On the topological spaces -

今　岡　光　範（数学教室）
Mitsunori IMAOKA

筆者は，教育学部での数学の専門教科における，学生の授業に対する目的意識と理解度に関心を持っている。[1]では実数の概念を扱う授業を取り上げ，[2]では線形代数の授業を取り上げて，それぞれの授業の意図と，それに対する受講生の理解の現状を報告した。ここでは，位相空間に関する授業について報告する。[1]

1．主旨

教員養成が主目的の教育学部において，数学の専門教科をどのように教えるかは，種々の意見の分かれるところであるが，将来の教師達の数学観と数学的能力に関係していて，重要な問題である。教育学部での数学の専門教科は，理工系学部での数学の専門教科と比べた場合，数学という学問を扱うことに違いはないが，それによって将来の数学教師の数学的資質を向上させるという，その目的に違いがある。小中学校での算数や数学の現行の内容には，高度に発達し多岐に渡る現代数学の成果はほとんど反映されていない。そして，以前から注目されているコンピュータ教材の導入も，いまだ模索の状態にある。学校数学が，時代の要請をいかに取り入れていくのかは，数学のみならず科学全体の将来を大きく左右する。数学の文化を良く理解し，生徒達の思考過程が分析でき，将来の数学教育のあり方が検討できるような，幅広い能力を持つ数学教師を養成することが，教育学部の数学教育には要求されている。

しかし，教育学部の学生に限らず，数学を学問として理解し，それを応用する能力を獲得することは，容易なことではない。人間の英知の産物である数学は，長い歴史の中で蓄積され，その一部を理解することさえも，並大抵の努力では不可能である。それに加えて，教育学部の数学専攻生は，数学の専門教科以外の教育関係教科を勉強する必要がある。そのため，理工系の学部で数学を専攻する学生達に比べて，時間的な制約があり，理解を促進するための演習の時間が少なく，数学理論の心髄を鑑賞するための時間が少ない。

これらの事情を考慮するとき，教育学部での数学教育において，数学の専門教科の中では，特に，数学の基礎分野の教育の充実を計ることが重要であると考える。それは，数学

[1]Key Words：数学教育、位相空間、専門教科、理解度.

を専攻する学生が，時間的な制約から数学の高度な専門理論を数多くは履修できないことと，将来の数学教師の養成には，数学を駆使して科学技術に役立てる能力の養成よりも，数学のアイデアのすばらしさやその思考方法の重要さが理解できる能力の養成が，より望まれていると思うからである。数学の基礎分野の授業は，多くが1，2年次の初年次の学生達を主対象とする。本学の初年次の学生が，数学の専門教科の学習において，どのような点で困難に陥っているのかを調べ考察することは，数学の基礎分野の教育充実のために必要であると考える。その観点で，数学の基礎分野の一つである位相空間の授業を考察することが，本稿の目的である。

2．集合と位相

位相空間論とは，位相構造を持つ集合の研究を意味する。それは，位相構造を定める位相空間の公理から出発し，位相空間の諸性質を，集合論で基本的な概念のみを用いて，純粋に論理的に構成していく。その位相構造は，解析学を始め幾何学や代数学などの各種の理論のなかで，それぞれの理論に応じた意味が賦与され，数学の種々の概念を合理的に表現する。幾何学では，位相空間は位相幾何学の舞台であり，位相幾何学は，微分幾何学と共に，今日の幾何学の中軸である。

位相空間で重要なのは，「連続」の概念で，それは，数学における「無限」と「極限」の概念に深く関係している。歴史を遡れば，Newton(1642−1727)やLeibnitz(1646−1716)が，物体の運動を処理するものとして考案した，いわゆる微分法は，最初は数学の理論というよりも物理の処理技術として注目された（[3]参照）。その後，18世紀には，Euler(1707−1783)，Lagrange(1736−1813)，Laplace(1749−1827)らによって，微分法の豊富な応用が示され，実用面のみならず，数学理論への重要性が認識された。しかし，その微分法の理論基盤の確立は，かなり後のことである。Cauchy(1789−1857) は微分法の原理面を問題視し，Dedekind(1831−1916)やCantor(1829−1920)は実数論を展開した。それらの成果を用いて初めて，微分法は，微分積分学という学問的立場を確立した。微分積分学を包括して発展した解析学は，今や，数学に無くては成らない存在である。

その解析学の確立の契機となった実数の概念には，どうしても無限と極限の概念が同居する。人間の思考において，無限の概念は，随分と曖昧さが伴う。それは，人間の生命が有限であることや，人間が経験できる世界が有限であることと，無関係ではない。既に古代ギリシャの数学の中でも，アキレスと亀の逆理などにその例をみることができる。ギリシャの数学では，無限のもつ各種の不可思議さのために，あえて無限に対する思考を避けて理論を展開した。しかし，微分積分の概念は，その定義自身からして，無限と極限の概念を曖昧にして通り過ぎることはできない。微分積分の理論的基盤を与えるために，無限と極限の概念を数学の範疇で正確に把握し体系化する必要が生じた。その克服の歴史の中で誕生したのが集合論であり，その集合論を基盤として，解析学の理論の基礎を確定しているのが，位相空間論である。

学校数学において，数学教育現代化の考え方のなかで，位相幾何学的な図形の扱いが試みられた。アメリカでは，SMSGによる実験的教科書([4])によって，位相幾何学の単体複体の諸性質を，初等教育に導入する教材が試行された。日本でも，その現代化の流れで，

昭和40年代後半の中学校数学の教材に，オイラー標数のような位相幾何学的な概念が登場していた。しかし，数学教育現代化の衰退と共に，昭和52年の改訂で，それらの図形の見方は姿を消した。高校での微分積分の教材においても，連続性の概念を必要とする部分は，できるだけ直観的に扱うように工夫されている。そして，数学者以外の科学者にとっても，数学を応用する多くの場合に，位相空間論の知識が無くても事足りる。この様に，位相空間論は，数学理論での重要さと，学校数学や数学以外の研究での不要さの差が，際だって違っている理論の一つである。それは，位相空間の概念の難かしさにも起因する。

多くの数学理論が位相空間の概念を必要とするため，本学では，位相空間論を数学の基礎理論として扱っている。今回，学生の動向を調べた授業は，筆者が1992年に担当した授業の中で，前期の，集合に関する授業「数学通論II」と，後期の，位相空間に関する授業「一般幾何学II」であり，受講生の多くは，２年次の学生であった。集合に関する授業を同時に調べたのは，集合の基本概念の理解が，位相空間論の理解に深く関係しているからである。数学通論IIでは集合に関する，そして，一般幾何学IIでは位相空間に関する，初歩的で基本的な部分の内容だけを扱った。これらの授業の内容を要約すると，次のようであった。

集合に関する内容（数学通論II）．

1．命題について。数学での論理は，「性質Ａであるならば，性質Ｂが成り立つ」の様な形式の，いくつかの命題を結び付けて行う。それらの各種の命題と集合の概念との関係を明示した。
2．写像について。各種の理論で，写像は重要な役割を持つので，写像に共通する性質を整理した。
3．同値関係と商集合について。「同じ」ということに関して，同じ図形，合同な図形，同じ面積の図形という様に，考える性質によって，「同じ物」が異なる。数学でそのような同じさを正確に表すのが，同値関係であり，それによって類別してできる集合が商集合である。これらの概念は，重要であるにも関わらず，学生にはなかなか理解できない概念なので，時間をかけて扱った。
4．有限集合と可算集合について。導入部に集合論の誕生の歴史を簡単に解説し，Russellの逆理を例に挙げ，無限集合の難解さを例示した。そして，無限集合の出発点として，可算集合の概念を説明した。
5．集合の濃度について。個数の概念の一般化である濃度の設定と，可算濃度および連続体濃度を中心に，濃度の基本的性質に触れた。
6．濃度の大小と演算について。濃度の大小を比較することを定義し，Bernsteinの定理を述べ，いくらでも大きい濃度を持つ集合の存在を説明した。

位相空間に関する内容（一般幾何学IIの内容）．

1．距離空間。実数の性質から始めて，ユークリッド空間の図形，そして，一般の距離空間の概念を導入し，各種の例を与えた。
2．位相空間の公理。位相空間を設定するためには，いくつかの同値な方法があるが，ここでは開集合系を用いる方法を示した。それによる位相構造の概念と，位相空間の

いくつかの基本的な概念に触れた。

3．連続写像。位相空間と連続写像によって，位相空間のカテゴリーが与えられることを説明し，連続写像のいくつかの基本的な性質を整理した。

4．部分空間，直積空間，商空間。位相空間を構成するとき必要なこれらの概念を定義し，具体的な例を与えた。

5．連結性。図形が繋がっているということの正確な定義は，位相構造を通して初めて定まる。それが連結性である。連結の正確な定義と，その応用例を与えた。

6．コンパクト。図形の広がりの中で，無限と有限の広がりを区別するのがコンパクトの概念である。平均値の定理やTaylor展開なども，このコンパクトの性質にその原理を持つ。コンパクトの概念の重要性を説明し，ユークリッド図形の場合の具体的な特徴づけを行った。

3．アンケート調査

2節で示した，集合に関する授業「数学通論II」を授業(s)で，位相空間に関する授業「一般幾何学II」を授業(t)で表す。双方の授業で，最終試験とは別に，アンケートを行い，受講生の，授業の内容と説明の仕方に対する感じ方，および，日頃の学習状況を調べてみた。アンケートの目的は，学生の実態を調査することによって，今後の授業での改良すべき点を知る目的で行った。試験の答案によって受講生の理解度はある程度分かるが，本稿の主旨に沿って，学生自身の授業に対する心情を調査する必要があった。アンケートは，最終試験の受験者全員を対象とし，無記名で行った。

授業(s)の受講生数，最終試験受験者数，および，単位取得者数は，それぞれ，3年生以上が15名，10名，9名で，2年生が30名，28名，15名であった。テキストには，各内容を要約したプリントを準備し，足らない説明に対しては参考書を指示した。そのプリント中に練習問題を与え，その問題の中から，小テストを数回行った。

授業(t)では，受講生数，最終試験受験者数，および，単位取得者数は，それぞれ，3年生以上が１８名，１１名，１１名で，2年生が４０名，３９名，３６名であった。その中に聴講生1名を含む。テキストには[5]を使用した。単位取得者が多いが，それは，試験の成績が全体に悪かったため，水準に達しなかった多くの学生達に対しても，単位を出さざるを得ないという事情があった。

アンケート結果. 実際には，3年生以上と，2年生の受講生を分けて集計したが，ここでは，それらを合計して示す。

1．授業(s)に対するアンケート結果.

I．授業の難易度について。

(i)内容全般の難易度を求めた。

よく理解できた	1名
だいたい理解できた	8名
半分位解った	10名

理解できない所が多かった　14名
全く理解できなかった　5名

(ⅱ)どの内容が解りにくいかを具体的に求めた。２名以上の感想にあった項目。
濃度の概念（１４名），　同値関係と商集合の概念（４名），
写像の性質（３名），　定理の証明　（２名）

II.授業の仕方について。

(ⅰ)説明の仕方に対する理解度を求めた。

よく理解できた　２名
だいたい理解できた　９名
半分位解った　14名
理解できない所が多かった　９名
全く理解できなかった　３名
（無回答　１名）

(ⅱ)授業の仕方に対する意見や要望を求めた。２名以上の意見。

練習問題の解答の説明が不足（４名）
内容が難かしすぎる　（４名）
授業の進め方が速すぎる　（３名）

III.自分自身の勉強態度について。

(ⅰ)勉強の頻度を求めた。

興味を持ってよく勉強した　３名
日頃からある程度勉強した　７名
試験前だけしか勉強しなかった　20名
ほとんど勉強しなかった　７名
（無回答　１名）

(ⅱ)自分の勉強を通しての感想を求めた。（無解答者　４名）

頭にすんなりと入った　（1名）
とりあえず解った　（２名）
もっとやれば良かった　（９名）
日頃の勉強の必要を感じた　（２名）

勉強不足を反省している	（5名）
復習すべきだった	（3名）
理解ができなかった	（4名）
あまり理解ができなかった	（2名）
一人でやると解らない	（1名）
授業中に理解することは難しい	（1名）
具体化できない	（1名）
勉強をきちんとやっても理解できたかどうか疑問	（2名）
興味が湧かなかった	（1名）

2．授業(t)に対するアンケート結果.

I．難易度について。次の段階を設定した。

(a)　よく理解できた，(b)　だいたい理解できた，(c)　半分位解った，
(d)　理解できない所が多かった，(e)　全く理解できなかった．

（i）位相空間の各概念の難易度について。

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	無回答
距離空間	5名	14名	21名	4名	2名	2名
位相空間	1	4	22	17	4	
連続写像	0	11	18	15	4	
連結	2	9	14	17	6	
コンパクト	1	2	6	20	17	2

（ii）位相空間という概念について。

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	無回答
概念の重要性	0名	0名	11名	24名	11名	2名
理論展開	0	2	7	30	7	3
イメージ	1	2	12	22	9	2

II．授業について

（i）説明の仕方に対する理解度を求めた。

(a)	よく理解できた	1名
(b)	だいたい理解できた	2名
(c)	半分位解った	18名
(d)	理解できない所が多かった	21名

(e)　全く理解できなかった　　　2名
　(無回答　4名)

(ⅱ)授業展開とテキストの展開の不一致についての意見。

別にかまわない　　(26名)
一致させて欲しい　(13名)
　(その他いくつかの意見あり)

(ⅲ)授業の仕方に対する意見。

速すぎる	(20名)
テキストをもっと使って欲しい	(3名)
具体例がもっと欲しい	(1名)

Ⅲ. 自分自身の勉強態度について

(ⅰ)勉強の頻度を求めた。

よく予習復習をした	0名
時々，理解のための勉強をした	6名
試験やレポートの無いときは勉強しなかった	41名

　(無回答　1名)

(ⅱ)勉強して感じたこと。2名以上あった意見。

奥が深くて面白い	(2名)
もっと努力すべきだった	(5名)
見直そうと思う	(2名)
理解する時間が欲しかった	(2名)
ある程度しか解らない	(2名)
抽象的で解りにくい	(5名)
暗記ばかりだった	(3名)
解らなかった	(2名)
難しい	(6名)

一つの集計

1. 授業の内容と説明の仕方に対して，それぞれ，理解できないところが多いと答えた受講生の割合。((s) Ⅰ(ⅰ), Ⅱ(ⅰ), (t) Ⅰ(ⅰ), Ⅱ(ⅰ))

　　　　内容　　　　説明

授業(s)	50%	32%
授業(t)	45%	52%

2．自分の学習で，ほとんど試験前以外には，予習復習をしなかった受講生の割合。((s)Ⅲ(ⅰ)，(t)Ⅲ(ⅰ))

授業(s)	73%
授業(t)	87%

3．位相空間の各概念に対して，それぞれ，理解できないところが多いと答えた受講生の割合。((t)Ⅰ(ⅰ))

距離空間	13%,	位相空間	44%
連続写像	40%,	連結性	48%
コンパクト	80%		

4．位相空間を考えるとき，その概念の重要性，理論展開，概念のイメージに関して，それぞれ，理解できないところが多いと答えた受講生の割合。((t)Ⅰ(ⅱ))

重要性	76%
理論展開	80%
イメージ	67%

分析

集計１から，本学の学生達が，基礎的と考えられる授業(s)で，既に，理解が困難になっていたことが分かる。

集計２から，受講生の多くが，日頃ほとんど理解の努力をしていない様子が分かる。たとえ授業が解らなくてもそのまま過ごし，試験前に勉強してみて，改めて理解ができないことを感じていることが，結果Ⅲ(ⅱ)からうかがえる。

集計３から，位相空間の基本概念の中で，特に，コンパクトという概念が理解されにくいことが，浮き彫りにされている。コンパクトの概念の重要性は，授業で繰り返し強調し，いくつかの例を提示した。しかし，試験でも，コンパクトに関する性質の証明は，多くの受講生ができていなかった。

集計４から，位相空間を考える事の意義は，ほとんど理解されていないことも分かる。(s)と(t)双方の授業で，多くの受講生達が，意味が解らないまま，丸暗記などの苦しい方法で試験に臨んでいたことが想像できる。

４．検討

大学の１，２年次の学生達に，位相空間論を納得のいく形で理解させることには，次のような困難が伴う。一つには，位相空間論の理解には，抽象的な理論を抽象的な形で処理する力が要求されることである。そのために，初年次の学生に対して，ある種の過剰な能力を期待する面がある。一つには，多くの初年次の学生達は，位相空間論の存在価値が理

解できないため，その学習意欲を欠く面があげられる。そして，一つに，学生の気質の問題がある。哲学的な思考に耽け，討論を好み，難解な理論にあこがれる学生像は，ほとんど姿を消しつつある。多くの学生達が，効率良く効果が期待できる分野を好み，長期に渡る思考や努力の積み重ねを避けたがる傾向にある。それが最近の学生のみの傾向とは単純にはいえないが，その傾向は，数学の場合には決定的に不利である。以下，３節の調査をもとにして，これらの問題点を検討する。

この位相空間に関する授業で，その内容の理解を困難にしている理由の一つとして，受講生の努力不足があることは，集計２から分かる。しかし，上記のように，位相空間のような抽象的な概念を理解するのには，正確に論理を検証し展開する能力が要求される。多くの受講生達が，そのための能力を獲得できていないことは，集計１の内容に対する％，集計３の各項の％，および，集計４の理論展開とイメージの項の％が示している。初年次の学生達が，少しづつでも，抽象的な思考に慣れ，論理を追いながら，位相空間の概念形成ができるためには，半期という授業時間数はいかにも少ない。一つの方策として，１年間の講義にするか，または，演習の時間を平行して行うことが考えられる。適当な演習によって受講生の論理や推論の力が促進され，具体例を豊富に取り入れることによって，概念形成が容易になる。もしその方策が実施できれば，少なくとも，今の状況は改善される。ただし，本学のような規模の教育学部では，この方策の実現には，数学専門科目のカリキュラムとの関係で，いくつかの問題点がある。授業(t)の様に，受講者が５８名もいる授業では，その人数のため，演習の時間を設けてもあまり大きな効果は期待できない。そして，数学の専門教科は，位相空間論以外に数多くあり，一つの教科に多くの時間を割くことは，教官数の関係で難しい。アンケート結果(s) II (ⅱ)や(t) II (ⅲ)の中に，授業のペースが速すぎるという意見が多いが，このことも授業の時間数と無関係ではない。位相空間の概念は，そのなかに登場する諸概念を通して，全体として認識されるべきものであり，一部の概念のみを個別に扱うことは，真の理解にはならない。それ故，ある程度の授業展開の速さは避けられず，少しでもそれを解消するためには，時間数が必要になる。

集計４の最初の項の％が示すように，受講生の，位相空間の概念の重要性についての認識は，極めて低い。集計１の説明の項の％から，説明の仕方にその原因の一つがあることは否定できない。しかし，初年次の学生達が，位相空間の概念を有効に用いる理論をほとんど知らず，概念の重要性を認識する下地がないことも，大きな原因である。これは，カリキュラムの構成に伴う困難な問題である。専門の理論を明確に教えようとすれば，位相空間などの基本的な概念は前提にする必要があり，そのための学習が必要になる。その様な学習は，ときには，それ自身の自己目的を欠き，基礎訓練のみに終始する可能性がある。数学という学問の性格上，ある程度そのような基礎訓練は避けられず，専門の理論を通してその価値が認識できれば，その訓練は報いられる。実際，理工系学部での数学教育では，基礎訓練を課し，専門教科に焦点をあわせる形のカリキュラムは，その目的から，合理性がある。しかし，１節で述べたように，教育学部では，数学の基礎分野の教科の充実を考える必要があり，一つ一つの分野の教科が，たとえ基礎教科であれ，それ自身の自己目的を持ち，各段階で何がしかの完結をみる必要があると考える。その意味では，位相空間論のような多くの理論の基礎となる理論は，逆に学年の後半に位置付けることも考えられる。もし幾つかの理論の下地があれば，抽象性のなかに込められた意図が理解できる可能性が

ある。ただし，その場合，位相幾何学のような，位相空間の概念抜きでは説明できない重要な理論をどう扱うか，という問題が生じる。

2節で述べたように，位相空間の概念は，それが誕生した大きな理由があった。数学のどの理論も，必らずその誕生の理由と発展の経緯を持っている。教育学部の数学の授業では，その様ないきさつを授業の内容に盛り込むことが，特に必要だと考える。数学史という形の授業でなくても，数学の個々の専門教科のなかで，その理論独自の誕生の状況とその後の発展の経緯を説明しながら理論を語ることは，将来の数学教師の数学観の育成に大きく貢献する。それは，そのまま理論の中身の理解に繋がる訳ではないが，少なくとも，理論の外郭形成に役立ち，そのことによって，理論を学ぶことへの意欲を誘発できれば，その効果は大きい。

参考文献

[1] 遠藤秀幾・今岡光範・門田良信，教育学部での数学の授業から
—実数の概念の扱いについて—，和歌山大学教育学部紀要，教育科学第40集，7－14頁，1991年.

[2] 遠藤秀幾・今岡光範・門田良信，教育学部での数学の授業から
—線形代数学について—，和歌山大学教育学部紀要，教育科学代4 1集，47－55頁，1991年.

[3] 吉田洋一・赤摂也，数学序説，培風館，1961年.

[4] SMSG,Mathematics for junior high school，vol 1 PartI，vol 2 Part II.

[5] 小林貞一，集合と位相，培風館，1977年.