食塩水の問題から見たベイズ定理

Bayes' theorem from a view point of the salted water problem

門 田 良 信　　佐 藤 英 雄

Yoshinobu KADOTA and Hideo SATO

(和歌山大学　教育学部　数学教室)

(Dept. Math. Facul. Edu. Wakayama Univ.)

2004年10月12日受理

1. 序

大学の理系学生は専門科目の基礎として「確率・統計」の授業を受けるのが普通である．とくに筆者の属する教育学部では，それが中学・高校の数学免許を取得するための必修科目の1つとなっている．

ここではその最初の部分に現れる「条件付き確率とベイズ (Bayes') 定理」の教育を考える．この小論の意図は，「ベイズ定理を使って解ける問題は食塩水の問題に直して解くことができる 」ことを例によって解説し，そのときに得られる視点がベイズ定理を様々な問題に応用するときの洞察を与えることを示すことにある．

食塩水の問題とは小中学校で習った誰もが解くことができる問題である．それと同じ方法でベイズ定理が使えることが解れば，この定理の理解を深めることになる．全体の流れの中でこのような授業を行う目的は次の2点にある．

(i) 条件付き確率の概念を明確にして，確率の考え方に慣れる．

(ii) ベイズ定理を使って様々な問題を解くことにより，確率の面白さを経験する．

上記 (i), (ii) について説明を補足しよう．

筆者の「確率・統計」は高校のカリキュラム制度等の関係から，現行の高校数学 C(以前は数学 B) の「確率分布」の履修を仮定せずに，それを含むものとして行うことになる．また，冒頭に述べた事情により数学的な考えを多少重視する．全体として普通よく行われる「確率・統計」の内容である．しかし，学生からは，基礎数学の中でも独特の難しさを持つ科目として受け取られているようである．遠藤他 [3]

その理由を考えると，第一には，数学的な注意深い思考と現象面への応用を視野に入れた柔軟な態度が必要となる．例えば事象や確率の定義については，公理的に考えても直観的説明をしても不十分な部分ができる 吉田他 [9]．その前後では事象の演算や確率の性質等の数学的公式があり，一方では様々な具体例が取り上げられる．第二は，学習過程として，事象，事象の演算，確率，条件付き確率とベイズ定理，独立性，そして2種類の確率変数，分布，期待値と分散 $\cdots$ と展開されていく中で，新しい基本概念が次々と現れて積み上げられていく．途中で引っかかるとその後の学習に響く．

第三は，記号の使い方が独特で，$\omega \in \Omega$ とか $P(A \cup B)$ 等の表現に慣れるためには練習が必要となる．

筆者の場合には直観的な確率の説明を手短に述べた後に，初等確率の規則を定義して基本的な公式を導くことにする．しかし，その後に条件付き確率を定義して公式を運用すると，数式が意味する概念と現象との対応が明確でなくなる傾向がある．

そこで先に述べた学習過程の中で，条件付き確率とベイズ定理および独立性の単元では，確率の概念と数式の意味を明確にし，それまでの学習結果の定着を図ることに重点を置くことにする．例題や練習問題によって確率を学ぶ楽しさを経験し，その直後の確率変数の学習への準備としたい．

しかし，条件付き確率とベイズ定理については，なるべく短時間で済ませたいという事情もある．後に学習する「統計」では確率変数の独立性が主として扱われ，条件付き確率とベイズ定理は脇役に廻ることになるからである．

以上をまとめて表したものが (i), (ii) となる．それを可能にするための一つの提案がこの小論の意図である．

次の第2節では，条件付き確率に食塩水としての解釈を与えた後に，全確率の公式を使う3つの例題を食塩水の問題として解く．第3節では，ベイズ定理を使う標準的な例題について2節と同様のことを考える．第4節は情報が不完全な場合にベイズ定理を使う例題を考える．この節の例題は少し難しいが，条件付き確率を考える面白さが味わえる．最後の第5節はこのような考え方を授業に取り入れる場合の注意と周辺にある問題点を考える．

2. 食塩水の問題から見た条件付き確率

この節では，条件付き確率の定義に食塩水の問題か

ら見た解釈を与える. 結論として, 全確率の公式は 2 つ以上の食塩水を混ぜ合わせてできる濃度を求める式と見なされる. このことを代表的な例に適用する. 条件付き確率と食塩水の問題を結びつけるものは確率の解釈と面積図による表現である.

事象を $A, B, \cdots$ と表す. とくに, 全事象を Ω, 空事象を $\emptyset$ と表す. 事象の和 $A \cup B$, 積 $A \cap B$, 補集合 $A^c = \Omega - A$ については既知とする. 事象 A の起こる確率を $P(A)$ とする. $P(A)$ は $P(\Omega) = 1$ としたときの Ω に対する A の起こる割合を示すことになる.

事象 A, B について $P(A) > 0$ とするとき, A が与えられたときの B の (あるいは B の A に関する) 条件付き確率 $P(B|A)$ を

$$\text{(2.1)} \qquad P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

と定義する. (2.1) より条件付き確率は確率の性質を満たすことになるが, ここでは省略する. (注1)

ところで, 2 つの食塩水 A_1, A_2 が与えられたとする. 全事象 Ω は A_1 と A_2 を混ぜ合わせたものとし, $\Omega = A_1 \cup A_2$ と表す. 考察の対象となる塩または水の一部を $C \subset \Omega$ とする. 確率 $P(C)$ は Ω の量 (重さや体積) を $P(\Omega) = 1$ としたときの C の量の割合と考えられる.

A_1 は x パーセントの食塩水 a グラム, A_2 は y パーセントの食塩水 b グラムとすると

$$\text{(2.2)} \qquad P(A_1) = \frac{a}{a+b}, \qquad P(A_2) = \frac{b}{a+b}$$

である. A_1 と A_2 に含まれる塩の全体を B と表すと, $A_1 \cap B$ は A_1 に含まれる塩を表す. 従って, パーセントを割合で表して

$$x' = \frac{x}{100}, \qquad y' = \frac{y}{100}$$

とおくと

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{aligned} P(A_1 \cap B) &= \frac{ax'}{a+b}, \\ P(A_2 \cap B) &= \frac{by'}{a+b} \end{aligned}$$

となる. 一方 (2.2), (2.3) を使って条件付き確率 (2.1) を計算すると,

$$\text{(2.4)} \qquad P(B|A_1) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{\dfrac{ax'}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}} = x'$$

となる. このことは

$$\text{(2.5)} \qquad \begin{aligned} P(B|A_1) &= \frac{A_1 \text{ に含まれる塩の量}}{\text{食塩水 } A_1 \text{ の量}} \\ &= \text{食塩水 } A_1 \text{ の濃度} \end{aligned}$$

を表している. 全く同様にして $P(B|A_2) = y'$ を得る.

(2.3) に (2.2), (2.4) を代入すると

$$\text{(2.6)} \qquad \begin{aligned} P(A_1 \cap B) &= P(A_1)P(B|A_1), \\ P(A_2 \cap B) &= P(A_2)P(B|A_2) \end{aligned}$$

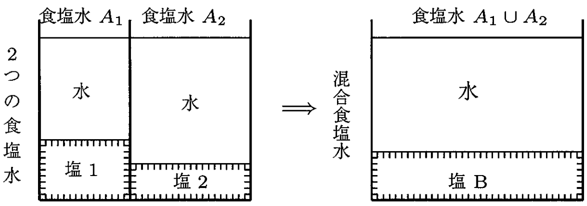
を得る. ところで $P(B)$ は (2.6) の 2 つの式の和となっているから

$$\text{(2.7)} \qquad P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

を得る.

これまでに確率の式で表したものを図 2.1 に描いて概念を明確にしよう.

図 2.1: 食塩水の図



A_1, A_2 : 食塩水
B : A_1 と A_2 に含まれる塩
$A_1 \cap B$: A_1 に含まれる塩 (塩 1)
$A_2 \cap B$: A_2 に含まれる塩 (塩 2)

$P(A_1)$ は $P(A_1 \cup A_2) = 1$ としたときの A_1 の割合.
ただし $P(B|A_1)$ は $P(A_1) = 1$ としたときの塩 1 の割合.

今まで A_1 と A_2 の 2 つの食塩水しか考えていなかったが, 何個でも同様に考えることができる. 食塩水 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に含まれる塩の量全体を B とすれば, (2.7) と同様にして

$$\text{(2.8)} \qquad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

を得る. (2.8) は全確率の公式とよばれる. これは混合食塩水の量を 1 とするとき, すべての塩の量の割合は各食塩水に含まれる塩の量の割合の和として表されることを示している.

以下に (2.7) を使う例題を示す. 確率の教科書では, サイコロ投げや袋の中の球を取り出す問題が最初に来るのだが, ここでは食塩水の問題に直しやすい問題から並べよう.

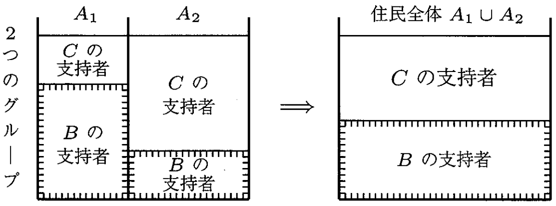
例 2.1. ある都市の選挙で 2 人の候補者 B, C がいる. 選挙の焦点となっているある政策について, 賛成と答えた者の 65 パーセントは B を支持し, 反対と答えた者の 70 パーセントは C を支持すると思われる. ある世論調査では, 住民の 40 パーセント はこの政策の賛成者であり 60 パーセント は反対者であった. この都市で無作為に 1 人を選ぶとき, この人が候補者 B を支持する確率を求めよ.

無作為に選ばれた人が B を支持する確率は, この都市のすべての選挙民の中で B を支持する人の割合を求めればよい.

(注1) この中で後の例題で使う主な公式は A, B, C を任意の事象, $P(A) > 0$ とするとき, (i) $B \supset A$ ならば $P(B|A) = 1$, (ii) $B \cap C = \emptyset$ ならば $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$ 等である.

選挙民全体は政策の賛成者 A_1 と反対者 A_2 に分かれ, 2 つの食塩水と見なされる. B の支持者を塩, C の支持者を水と考えれば, 図 2.1 とよく似た次の図 2.2 が得られる.

図 **2.2**: 例 2.1 の図



A_1 : 政策の賛成者全体
A_2 : 政策の反対者全体
B : B の支持者全体
$A_1 \cap B$: A_1 に含まれる B の支持者

これより例 2.1 は「65 パーセントの食塩水 40 グラムと 30 パーセントの食塩水 60 グラム をまぜると何パーセントの食塩水ができますか. 」という問題になる. 答えは 44 パーセント, 確率は $P(B) = 0.44$ となる.

次に Ω が有限個の根元事象からなる場合も考えておこう.

例 2.2. 箱 A_1 には 2 個の白球と 3 個の赤球が入っていて, 箱 A_2 には 3 個の白球と 1 個の赤球が入っている. いまさいころを投げて, 1 または 2 の目が出れば箱 A_1 を選び, その他の目が出れば A_2 を選んで, その中から無作為に 1 球を取り出すとする. 赤球が取り出される確率を求めよ.

箱 A_1 は確率 $\frac{1}{3}$ で選ばれ, 箱 A_2 は確率 $\frac{2}{3}$ で選ばれる. これを食塩水の量と考える. 各箱の球数の和に対する赤球の数を食塩水の濃度と考える. 箱 A_2 を選ぶ確率は A_1 を選ぶ確率の 2 倍だから, 食塩水の分量を 2 倍にとると, 結局「60 パーセントの食塩水 100 グラムと 25 パーセントの食塩水 200 グラムをまぜると何パーセントの食塩水ができますか. 」という問題になる.

赤球が取り出される事象 (すべての塩の量) を B として, 公式 (2.7) を使うために次の表を作成する.

表 2.1

	A_1	A_2	和
量の割合 $(P(A_i))$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
各々の濃度 $(P(B\|A_i))$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$	

答えは $P(B) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{30} = 0.367$ となる.

このような易しい例では食塩水の問題に直す必要はないが, そのような考え方に慣れることは意味があると思う. また一般に公式 (2.7) や (2.8) を使うためには表 2.1 を作ることは本質的で, それは食塩水の問題に直すことと同じ操作と思われる.

例 2.3. m 本の当たりと n 本のはずれからなるくじがある. 最初の人が 1 本を引きそれを元にもどすことなく 2 番目の人が 1 本引く. 最初の人と 2 番目の人が当たりを引く確率をそれぞれ求めよ.

最初の人が当たりを引く確率は $p = \dfrac{m}{m+n}$ であり, そのとき残ったくじは $m-1$ 本の当たりと n 本のはずれである. 従って 2 番目の人は 確率 $p = \dfrac{m}{m+n}$ で与えられる $\dfrac{m-1}{m+n-1}$ の確率で当たるくじを引くことになる. これが食塩水 A_1 の量の割合と濃度となる. 同様にして最初の人がはずれを引くときに残ったくじが食塩水 A_2 となる. 従って 2 番目の人が当たりを引く確率を求める問題は食塩水の問題として「$\dfrac{m-1}{m+n-1} \times 100$ パーセントの食塩水 $\dfrac{m}{m+n}$ グラムと, $\dfrac{m}{m+n-1} \times 100$ パーセントの食塩水 $\dfrac{n}{m+n}$ グラムをまぜると何パーセントの食塩水ができますか. 」と言い換えられる. 答えはパーセントを割合に直して $\dfrac{m}{m+n} = p$ となる. 表を作ると次のようになる.

表 2.2

	A_1	A_2	和
量の割合 $(P(A_i))$	$\frac{m}{m+n}$	$\frac{n}{m+n}$	1
各々の濃度 $(P(B\|A_i))$	$\frac{m-1}{m+n-1}$	$\frac{m}{m+n-1}$	

3. 食塩水の問題とベイズ定理

この節では, ベイズ定理を使って解ける例題を食塩水の問題から見ていく. 結論として食塩水に含まれる塩の量の比が事後確率を与えることになる.

(2.1) で A と B を入れ替えた式の分母に (2.8) を代入すると次の定理を得る.

定理 3.1. (Bayes' 定理) 事象の列 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ は次を満たすとする.

(i) $i = 1, 2, \cdots, n$ について $P(A_i) > 0$.

(ii) $i, j = 1, 2, \cdots, n$ かつ $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$.

(iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

このとき $P(B) > 0$ となる任意の事象 B と $k = 1, 2, \cdots, n$ について

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \tag{3.1}$$

が成立する.

いま食塩水 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に含まれる塩だけを取り出してきて, それぞれ $B_1, B_2, \cdots, B_n$ と表す. 塩全体を $B = \cup_{i=1}^{n} B_i$ とすると, (3.1) の左辺は (2.1) よ

り, 塩の全体量 $P(B)$ に対する A_k に含まれる塩の量 $P(B_k)=P(A_k\cap B)$ の割合を示している. 従って (3.1) は

$$P(A_k|B)=\frac{A_k\text{に含まれる塩の量}}{\text{塩の全体量}} \tag{3.2}$$

を表している. 塩の全体量とは $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に含まれる塩の量の和のことになる.

(3.2) は, すべての塩の粒子 $B=\cup_{k=1}^{n}B_k$ から無作為に塩を 1 粒取ったとき (塩の粒子は等質等大として), その 1 粒が元々食塩水 A_k に入っていた確率を示している. その意味で $P(A_k|B)$ を, A_k の事後確率と言う.

文章題が与えられたとき, (3.1) (または (2.8)) を用いて問題を解く手順と 食塩水の問題に直す作業は, 一般に次のように表される.

(1)　$\{A_i; i=1,2,\cdots,n\}$ を見つける.
　$\langle\langle$ $\{A_i\}$ が定理 3.1 (ii) と (iii) を満たすことが手がかりになる. これが食塩水となる. $\rangle\rangle$

(ii)　B を見つける.
　$\langle\langle$ 問題文の結論が $P(A_k|B)$ (または $P(B)$) と書けることから見つかる. B は塩の全体となる. $\rangle\rangle$

(iii)　$P(A_i)$, $i=1,2,\cdots,n$ と $P(B|A_i)$ あるいは $P(A_i\cap B)$, $i=1,2,\cdots,n$ を見つける.
　$\langle\langle$ $P(A_i)$ は食塩水の量の割合, $P(B|A_i)$ は A_i の濃度となる. $\rangle\rangle$

(iv)　(3.1) または (2.8) を適用する.

例 3.1. 例 2.1 で無作為に 1 人を選んだときこの人は候補者 B を支持していた. この人が政策の賛成者である確率を求めよ.

例 2.1 の図と記号をそのまま使う. 政策の賛成者の中で B を支持する (食塩水 A_1 の塩の量の) 割合は $P(A_1\cap B)=0.4\times 0.65=0.26$ であり, 全体の中で B を支持する (塩の全体の) 割合は $P(B)=0.44$ だったから求める確率は (3.2) より $P(A_1|B)=\dfrac{0.26}{0.44}=0.591$ となる.

例 3.2. 例 2.2 でさいころの目が観察できなくて, 箱 A_1 か A_2 かが不明のままに無作為に取り出された 1 球が赤球であったとき, 選ばれた箱が A_1 であった確率を求めよ.

例 2.2 の記号を使う. A_1 の塩の量は $P(A_1\cap B)=\dfrac{1}{5}$ となる. $P(B)=\dfrac{11}{30}$ だったから, (3.2) により求める確率は $P(A_1|B)=\dfrac{6}{11}=0.545$ となる.

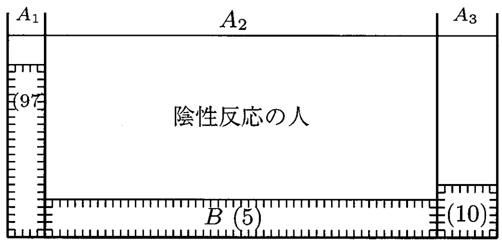
次の例はホーエル [7] を始めとして多くの教科書等で扱われている.

例 3.3. ある病原菌の感染を早期発見するための新検査法が提案された. この検査法で正しい反応が得られる割合は, その病原菌に感染している者には 97 パーセント, 健康な者には 95 パーセント, その病気以外の病気にかかっている者には 90 パーセントである. この検査法を受ける者の 2 パーセントはその病原菌に感染しており, 95 パーセントは健康な者であり, 残りの 3 パーセントはそれ以外の病気にかかっていることが予想されている. いまある人に対してこの検査法によって病原菌に感染している反応が出たとき, その人が本当にその病原菌に感染している確率を求めよ.

新検査法を受ける人が, 本当にその病原菌に感染している事象を A_1 とし, 本当は健康である事象を A_2, それ以外の病気にかかっている事象を A_3 とする. また, この検査法によって病原菌に感染している反応が現れる事象を B で表し, 陽性反応と呼ぶことにする. 正しい反応が得られる割合 0.97, 0.95, 0.9 から陽性反応の確率 $P(B|A_i)$ が 0.97, 0.05, 0.1 として求められる. 食塩水の問題に言い換えると「97 パーセントの食塩水

図 3.1: 例 3.3 の図

A_1 : 感染している人
A_2 : 健康な人
A_3 : 他の病気の人
B : 陽性反応の人



200 グラムを A_1 とし, 5 パーセントの食塩水 9500 グラムを A_2 とし, 10 パーセントの食塩水 300 グラムを A_3 とするとき, A_1, A_2, A_3 に含まれる塩の総和と A_1 に含まれる塩の量の比を求めよ. 」となる. 塩の量を計算すると, A_1 には 194 グラム, A_2 には 475 グラム, A_3 には 30 グラム含まれるから, 答えは $P(A_1|B)=194/(194+475+30)=194/699=0.278$ となる.

この値 0.278 は直観的には受け入れ難い. 新検査法はそんなに悪くないように感じられる. 一般に条件付き確率の計算結果が直観と合わないことはよくある. そんなときに食塩水の面積図を正確に描けば, 面積比が 0.278 の図ができて計算結果に照らすことができる. (ただし, 図 3.1 は見やすい図にするために正確ではない.)

4. 情報が不完全な場合のベイズ定理

第 3 節ではベイズ定理の基本的応用例を食塩水の問題として考えた. この節では教育的には標準的とは言

えないが興味深い例を考える．食塩水の問題に直す場合にも少し注意が必要となる．

今まで B は塩の全体としていたが，次の例 4.1 を考えるために，ここで B は少しでも塩を含む食塩水 (真水ではない) の全体と定義した場合を考えておこう．つまり

$$B=\{\,0\text{パーセントの食塩水ではない } A_i\text{の全体}\,\}$$

とする．(2.1) より $A_i\subset B$ でないならば $P(B|A_i)=0$, $A_i\subset B$ ならば $P(B|A_i)=1$ となる．(2.5) は成り立たないが，(2.7) や (2.8) は 0 となる項を含んで成り立ち，全体に対する少しでも塩を含む食塩水の割合を表すことになる．従って，$A_k\subset B$ でないならば $P(A_k|B)=0$, $A_k\subset B$ ならば (3.1) より

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} P(A_k|B) &= \frac{P(A_k)}{\sum_{i\in I}P(A_i)} \\ &= \frac{\text{食塩水 } A_k \text{ の量}}{\text{塩を含む食塩水 } A_i \text{ の量の和}} \end{aligned}$$

となる．(3.1) (または (2.8)) を用いて問題を解く手順と 食塩水の問題に直す作業も 3 節で与えたものと大きな違いは無い．

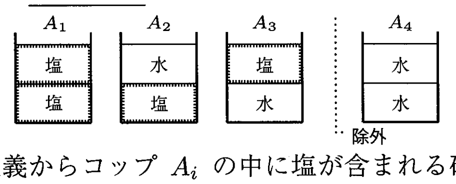
例 4.1. 2 枚の硬貨が衝立の向こうで投げられた．あなたはその結果を見ることはできないが，「2 枚のうち少なくとも 1 枚が表である」ことを知らされた．このとき 2 枚とも表である確率を求めよ．

この試行によって起こり得る根元事象は $A_1=$ (表 , 表), $A_2=$ (表, 裏), $A_3=$ (裏, 表), $A_4=$ (裏, 裏) の 4 通りで，それらはすべて確率 $\frac{1}{4}$ で起こる．

2 枚のうち少なくとも 1 枚が表である事象を B とすると $B=A_1\cup A_2\cup A_3$ となり，求める確率は$\mathrm{P}(A_1|B)$ と表される．

表を塩，裏を水，A_1, A_2, A_3, A_4 を食塩水と考えると，B は混合液の中に塩が含まれる事象となる．これより，次の食塩水の問題ができる．「コップの中に塩または水を確率 $\frac{1}{2}$ で 10 グラム入れる．同じコップでこれを 2 回繰り返した後に，中身を調べるとその中に塩が含まれていることが確認された．このとき塩が 20 グラム入っている確率を求めよ.」

図 4.1: 例 4.1 の図



B の定義からコップ A_i の中に塩が含まれる確率 $P(B|A_i)$ は値 1 または 0 をとることになる．これから次の表を得る．

表 4.1

	A_1	A_2	A_3	A_4	和
確率 $P(A_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
確率 $P(B\|A_i)$	1	1	1	0	

この表と (4.1) により求める確率は

$$P(A_1|B)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0}=\frac{1}{3}$$

となる．

例題 4.1 とよく似た問題に次の問題がある.西川 [5]

問題 A ある人に 2 人の子供があり，そのうち 1 人は男の子であることが分かっている．残りの 1 人が女の子である確率を求めよ．ただし，男女の生まれる確率は共に $\frac{1}{2}$ とする．

答えは例 4.1 と同様に考えると $\frac{2}{3}$ になる．ところが，$\frac{1}{2}$ が正解だと考える人もいるようだ．それなりの理由があるようだが，ここでは条件付き確率を使えば，$\frac{1}{2}$ を正解とすると奇妙な結果が導かれることを示しておこう．

根元事象は $A_1=$ (男 , 男), $A_2=$ (男 , 女), $A_3=$ (女 , 男), $A_4=$ (女 , 女), の 4 通りである．$B=A_1\cup A_2\cup A_3$とおくと，B は2人の子供のうち少なくとも1人は男の子である事象となる．$\mathrm{C}=A_2\cup \mathrm{A}_3$ と おくと，Cは 2 人の子供のうち 1 人は男の子他の 1 人は女の子である事象となる．正解と仮定したことより，$P(C|B)=\frac{1}{2}$ となる．従って条件付き確率の性質から

$$(4.2)\qquad P(C|B)=P(A_2|B)+P(A_3|B)=\frac{1}{2}$$

である．一方，(4.2) と $B=A_1\cup C$ より $P(A_1|B)=\frac{1}{2}$ となる． この式と (4.2) に $P(B)$ をかけて (2.1) を適用すると，B の定義により $P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{2}P(B)=P(A_1)$ が得られる． この結果は最初に $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4}$ としたことに矛盾する．

詳しい説明は省略するが，問題 A は条件付き確率を考える場合には細心の注意が必要となることを伝えている．

次の例題は「3 囚人問題」あるいは「サーベロニの問題」と呼ばれはるものが原型 Lindley [8] で，それに修正を加えたものである.市川 [1], 遠藤他 [2] 面白くて難しい問題としてよく研究されている．

例 4.2. アラン，バーナード，チャールスの 3 人は監獄につながれ，他の誰とも自分の身の上について話し合うことを禁止されている．

アランは，この 3 人のうち 2 人はいずれ処刑され 1 人は釈放されることを知っている．そこで彼は密かに

看守にたずねた.「私がいずれ処刑されるにせよ釈放されるにせよ, バーナードかチャールスのどちらかは必ず処刑されるのだから, 処刑される囚人の名前を 1 人教えてくれても, 私の身の上について話したことにはならないだろう?」それを聞いた看守は「バーナードは処刑される.」と答えた.

そこでアランは次のように考えた. アラン, バーナード, チャールスが釈放される確率をそれぞれ $p>0, q>0, r>0$ とすると, $p+q+r=1$ である. さらにこの看守はしばしば嘘をつき, バーナードまたはチャールスが釈放されるときに, その人が処刑されるという嘘をそれぞれ確率 μ_1, μ_2 で言う. アランが釈放される場合には, 処刑される者としてバーナードと答える確率は $\lambda>0$ である. いずれにしろ,「アランは処刑される」という言葉は嘘でも口にすることはない. アランはこれらの確率 μ_1, μ_2, λ の値についてもよく心得ているつもりである.

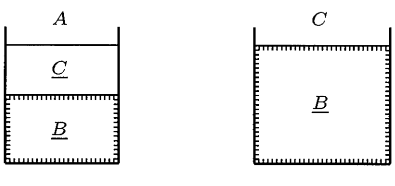
看守の答えを聞いた後に, アランは自分の釈放される確率をどのように考えたらよいであろうか.

アラン, バーナード, チャールスが釈放される事象をそれぞれ A, B, C と表す. 題意により $P(A)=p$, $P(B)=q$, $P(C)=r$ である. また誰か 1 人が釈放されれば他の 2 人は必然的に処刑される. 看守が, バーナードは処刑されると答える事象を $\underline{B}$, チャールスは処刑されると答える事象を $\underline{C}$ で表す.

(i) 最初に $\mu_1=\mu_2=0$ の場合を考える. 看守は嘘をつくことなく「バーナードは処刑される.」と言ったのだから, $P(B)=q=0$ となって $P(B)$ を考える必要がなくなる. また題意により C が起こるときの看守の答えは常に $\underline{B}$ となる. A が起こるときの看守の答えは $\underline{B}$, $\underline{C}$ のどちらかで, $P(\underline{B}|A)=\lambda$ である.

$P(A)=p$, $P(C)=r$ を食塩水の量, $\underline{B}$ をそれらに含まれる塩全体と考えると次の図ができる.

図 4.2: 例 4.2 の図: $\mu_1=\mu_2=0$ のとき



従って, 表を作ると次のようになる.

表 4.2

	A	C	和
確率 $P(\cdot)$	p	r	1
確率 $P(\underline{B}\vert\cdot)$	λ	1	

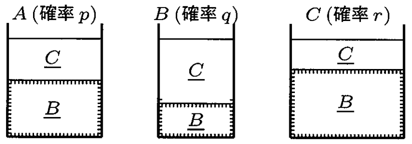
これより求める確率は (3.2) より

$$P(A|\underline{B})=\frac{p\lambda}{p\lambda+r}$$

となる. ただし, $q=0$ より $r=1-p$ である.

(ii) 次に一般の場合を考える. 今度は看守の答えが $\underline{B}$ であっても $q>0$ となることがある. 看守が嘘をつくのは B または C が起こるときで, $\underline{B}$ が起こる確率は $P(\underline{B}|B)=\mu_1$, $P(\underline{B}|C)=1-\mu_2$ となる. A が起こるときの看守の答えは (i) と同じである. 図に描くと次のようになる.

図 4.3: 例 4.2 の図: 一般の場合



各事象の起こる確率を考慮して, これを食塩水の問題に言い換えると「λ パーセントの食塩水 p グラムを A とし, μ_1 パーセントの食塩水 q グラムを B とし, $1-\mu_2$ パーセントの食塩水 r グラムを C とするとき, A, B, C に含まれる塩の量の総和と A に含まれる塩の量の比を求めよ. 」となる. これを表に表せば次のようになる.

表 4.3

	A	B	C	和
確率 $P(\cdot)$	p	q	r	1
確率 $P(\underline{B}\vert\cdot)$	λ	μ_1	$1-\mu_2$	

求める確率は (3.2) より

$$P(A|\underline{B})=\frac{p\lambda}{p\lambda+q\mu_1+r(1-\mu_2)}$$

となる. $P(A|\underline{B})$ は λ, μ_2 の増加関数で μ_1 の減少関数となる.

いま $\mu_1=\mu_2=\mu$ と仮定して $P(A|\underline{B})$ の最大値を考えてみよう. $q>r$ ならば $\mu=0$ のときに最大値 $\dfrac{p\lambda}{p\lambda+r}$ をとり, $q=r$ ならば μ の値に無関係に同じ最大値をとり, $q<r$ ならば $\mu=1$ のときに最大値 $\dfrac{p\lambda}{p\lambda+q}$ をとる.

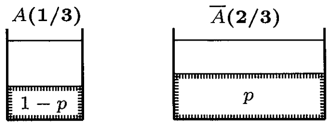
次の例題は本当にあったテレビ番組へ視聴者が答えを投稿した問題であるが, 正解は大変少なかったと伝えられている.ブロム他 [6]

例 4.3. あなたはテレビのショー番組に出演しているとしよう. あなたの横には司会者がいて前には 3 つの閉じた扉がある. その扉の中の 1 つには乗用車, 他の 2 つにはヤギが入っている. この中から, あなたは 1 つの扉を選ぶ. 司会者はどの扉に乗用車が入っているかを知っていて, 選ばれなかった扉の 1 つを開けてヤギを出した. そして「扉を選び直しますか. 」とたずねた. 扉から出てきたものをもらえるものとする. 乗用車をもらいたいときに, あなたは選び直して他の扉

を選ぶべきであろうか．確率を使ってどのようにしたらよいのかを説明せよ．

乗用車が入った扉を選ぶことを「当たり」，ヤギの方を選ぶことを「はずれ」とよぶことにする．第 1 回目の選択で「当たり」となる事象を A,「はずれ」となる事象を $\overline{A}$ と表す．題意により $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$ となる．第 2 回目に 1 つだけ残った第 1 回目に選ばれなかった扉を選ぶ確率を p とする．当然第 1 回目に選んだ扉と同じ扉を選ぶ確率は $1-p$ となる．図にすると次のようになる．

図 **4.4:** 例 4.3 の図 1

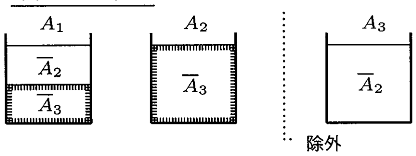


食塩水の問題としては「$(1-p)\times 100$ パーセントの食塩水 $\frac{1}{3}$ グラムと，$p\times 100$ パーセントの食塩水 $\frac{2}{3}$ グラムを混ぜ合わせてできる食塩水が最も濃くなるように p の値を求めよ．」となる．濃度を求めるのだからこの場合は (2.7) を使うことになる．答えはもちろん $p=1$ で第 2 回目の選択で「当たり」となる確率は $\frac{2}{3}$ となる．

もう一つの解法を考えよう．3 つの扉を扉 1, 扉 2, 扉 3 とし，その中に乗用車が入っている事象をそれぞれ，A_1, A_2, A_3 とする．$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$ と考えられる．

第 1 回目の選択であなたが選んだ扉を A_1 としても一般性は失われない．司会者によって開かれる扉が A_2 である事象を $\overline{A}_2$, 開かれる扉が A_3 である事象を $\overline{A}_3$ と表す．以上のことを図示してみよう．

図 **4.5:** 例 4.3 の図 2



いま司会者は $\overline{A}_3$ を選んだと仮定すると $P(\overline{A}_3|A_1)=\frac{1}{2}$, $P(\overline{A}_3|A_2)=1$, $P(\overline{A}_3|A_3)=0$ と考えられる．また題意により $P(A_3|\overline{A}_3)=0$ だから A_3 を考える必要はない．当面知りたいことは第 2 回目の選択をする直前の $P(A_1|\overline{A}_3)$ の値である．よって $\overline{A}_3$ を「塩」，$\overline{A}_2$ を「水」と考えると食塩水の問題として「50 パーセントの食塩水 $\frac{1}{3}$ グラムを A_1, 100 パーセントの食塩水 $\frac{1}{3}$ グラムを A_2 とするとき，A_1 に含まれる塩の量と全体の塩の量の比を求めよ．」とできる．これより，$P(A_1|\overline{A}_3)=\frac{1}{3}$ が求められる．条件付き確率の性質より $P(A_2|\overline{A}_3)=\frac{2}{3}$ も導かれる．

第 1 回目に選ばれなかった扉を選ぶ確率を p とすれば，第 1 回目では扉 1 が選ばれているのだから，$\frac{1}{3}(1-p)+\frac{2}{3}p$ を最大にする $0\leqq p\leqq 1$ を選べばよい．

最初の考え方は眼の付け所がよいから簡単である．このように考えるのであればいっそのこと「第 1 回目ではヤギが入っていると思われる扉を選びなさい．第 2 回目では必ず第 1 回目とは異なる扉を選びなさい．」と言った方がよく解る．2 つ目の解答の考え方は素直にやっているので長い．

例 4.3 は設定や条件の入り方が例 4.2 によく似ている．実際，$p=q=r=\frac{1}{3}$, $\mu_1=\mu_2=0$, $\lambda=\frac{1}{2}$ とすれば 例 4.2 のチャーリーが釈放される確率が例 4.3 で扉 2 に乗用車がある確率になっている．

5. まとめ

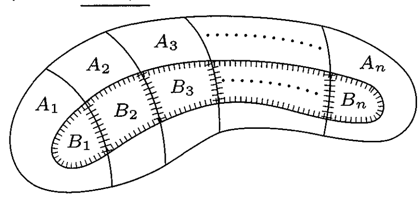
(i) ここまで様々な問題を見てきたが，「全確率の公式 (2.8) とベイズ定理 (3.1) を使う問題はすべて食塩水の問題に直すことができるか．」と考えるのは当然であろう．次のような理由により直すことができると考える．(ここで，A が B に含まれるとき $A\subset B$ と表すことにする．)

(2.8) あるいは (3.1) を使って解ける問題の集合

$\subset \{P(A_i),\ P(B\mid A_i);\ i=1,2,\cdots,n\}$ または $\{P(A_i),\ P(A_i\cap B);\ i=1,2,\cdots,n\}$ の値が与えられている問題の集合

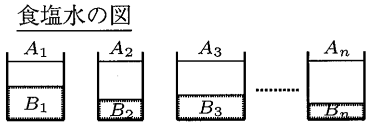
$\subset$ 次の図 4.6 で各 A_i, $i=1,2,\cdots,n$ の量，各 B_i, $i=1,2,\cdots,n$ の量が分かる (与えられている) 問題の集合

図 **4.6:** ベン図



$\subset$ 次の図 4.7 で各食塩水 A_i と塩 B_i ($i=1,2,\cdots,n$) の量が分かる食塩水の問題の集合

図 **4.7:** 食塩水の図



(各食塩水 A_i は図 4.6 のベン図を輪切りにしてできる．)

ただし食塩水の問題に直すことが常にその問題を易しくするとは限らない．むしろそのような思考方法が新しい問題に対して洞察を生むことに期待したい．

(ii) 実際の授業ではここに書いた一部をやればよい．筆者が行った授業では例 3.3 を食塩水の問題として解説したことがある．その結果はかなりよかった．いつもは出ない質問があり予定時間を 15 分位オーバーし

た．ベイズの定理を理解した学生の数も増したと思われる．しかし様々な事情からその効果を統計的に調べてはいない．一方例 4.2, 4.3 は他大学ではやることもあるようだが 河野 [4], 筆者の授業でやったことはない．

(iii) 最後にこの小論で今まで考えなかった事柄について触れておこう．それは理解の仕方と表現の問題である．

「解る」という場合, 直観的に解った上で数学的に解る必要があると思う．ベイズの定理の応用を食塩水の問題として見ることは直観的に解るための方法であろう．本当はこのような基本的定理は数学的にも解って欲しい．しかし, 直観的な理解の後に数学的な理解が得られるのが普通であるし, また確率が面白いと感じられるための契機を与え得るならば, ここで述べた考え方も価値はあると考える．

数学的に解ればその表現 (解答の表し方) が異なってくるものと思われる．どのような計算をして解答を得たのか, ということよりも, どのようなことを真実と考えて解答が得られたのか，ということを説明することの方が重要に感じられるはずだからだ．

しかし, この小論ではそのような表現をとらなかった．食塩水の問題に直せれば解けたと見なした．解答は別に与える必要がある．

参考文献

[1] 市川伸一，「3 囚人問題の解決と理解の過程をめぐって」, 認知科学の発展 1, 講談社，1988(1–32p).

[2] 遠藤秀機，門田良信，貴志一男，「初歩の確率・統計から見た「3 囚人問題」」, 和歌山大学教育学部紀要 (教育科学)，vol.**41**,1992(11–20p).

[3] 遠藤秀機，門田良信, 貴志一男,「条件付確率とその応用—初歩の確率·統計における指導案(その2)—」, 和歌山大学教育学部紀要 (教育科学)，vol.**42**,1993(69–81p).

[4] 河野敬雄,「確率概論」, 京都大学学術出版会, 1999.

[5] 西川信次,「積事象 $A \cap B$ の捉え方について」, 日本数学教育学会誌 (数学教育)，第 **70** 巻 7 号, 1988(213–220p).

[6] G. ブロム, L. ホルスト, D. サンデル著, 森真訳，「確率問題ゼミ」，シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995(4−6p).

[7] P.G. ホーエル著，浅井　晃，村上正康訳,「初等統計学」原書第 4 版，培風館，1981.

[8] D.V. Lindley, "Making Decisions" John Wiley & Sons, 1971.

[9] 吉田甫, 多鹿秀継編著，「認知心理学からみた数の理解」(第 7 章 確率概念), 北大路書房，培風館，1995.

Bayes' theorem from a view point of the salted water problem

Wakayama Univ.　Yoshinobu Kadota
Wakayama Univ.　Hideo Sato

Bayes' theorem is an important and interesting proposition in the field of elementary probability theory.

In order to make it possible to apply the theorem easily to a given problem, we will show that the problems solved by applying Bayes' theorem can be solved in the same way as the salted water problem. We will modify several examples to the salted water problem, observing how we can get the problems effectively.

Most of our examples are standard, whereas a few of them are amusing like puzzles and somewhat difficult concerned with incomplete information.

The modification to the salted water problem will give us much insight to the applications of Bayes' theorem and provide an intuitive description of elementary conditional probability, contributing to the education of it.