複素数の世界（２）

The World of Complex Numbers (2)

佐藤英雄（和歌山大学教育学部）
Hideo SATO

2005年10月12日受理

概 要

「図形」は中学数学の３本の柱のうちの一つとして位置付けられている。具体的に扱われているのは、平面幾何に限定すれば、三角形の合同と相似、円周角等である。「図形」の指導にあたっては、直観と論理の対応をたしかなものにすることが特に重要である。しかし、三角形の合同条件は決定条件と同値として、それを教育上確認させる手段として採られているのは、実際に作図させてただ一通りだけしか得られないことを感覚的に納得させることである。言わば神秘的な三角形の合同条件を認めさせれば、その後の「図形」の展開はかなり論理的に行える。

この展開の仕方は、ユークリッド原論のそれを教育的に工夫はしているものの本質的には変わらない。言い換えれば，ユークリッド原論の欠陥を引きずっている。具体的に言えば、ユークリッド幾何の基本手段である、合同や相似の概念が不明確である。基本量は長さと角（の大きさ）であるが、特に角の概念が不明確である。その結果、高校数学で三角関数が出てくるときに戸惑うことになる。中学数学の段階では、これらについて、教育上、あいまい、かつ神秘的な扱いをすることはやむをえない。しかし、教師としては平面幾何を支える数学的な論理的基盤をわきまえておく必要がある。

本稿ではユークリッド原論の問題点を指摘し、それを克服するために、複素数の世界（１）で代数的ないし純解析的な手段で構成・展開した複素数体を基盤として平面幾何を展開する。それをヒルベルトの著名な「幾何学基礎論」と対比させる。

1．論証的数学の起源

文献的には、数学的知識を演繹的論証体系に編成するというアイディアの起源を確定できないが、古代ギリシャ以前には遡らないという意見が一般的である。具体的な数学的知識とは古代ギリシャ人にとっては、数論（自然数論）と幾何学（初等幾何学）であった。演繹的論証体系を意識すると、数論と幾何学のいずれが基礎構造たるべきかが問題となる。彼らは公共の広場で議論した。そこでの議論は、自他ともに認める前提から、反駁の余地のない正当な論理によってなされなければならず、循環論法は許されない。これは現代数学の論証・証明の精神に他ならない。この意味で、数学は古代ギリシャから始まった。

伝えられるところによれば、ピタゴラス派の理念は「数は万物を支配する」であった。このときの数は自然数だった。ところが、自然数に還元できない量(無理数）を発見したため、この思想は破綻した。替わって登場したのが、数学の根幹を初等幾何学に置き換え、量を線分の長さで捉えようとする思想である。プラトンの活躍した時代には、すでにこの思想は主流となっていたが、数学的著作としては前3世紀頃に著されたとされるユークリッド原論で確定した。これは学としての完成度が高く、その後、２千年あまり、確かな学問の典型とされた。

2．ユークリッド原論の内容

ユークリッド原論（これ以降「原論」という）は幾何学だけを扱っているのではない。全１３巻からなるが、その内容は1巻から4巻までは平面幾何、５巻と６巻は実数論、７巻から９巻までは（初等）整数論、１０巻は二次無理数、１１巻以降は空間図形、となっ

ている。叙述順序は歴史的発展順序とは一致していない。整数論の部分は基本的にはピタゴラス派が得たものであり、平面幾何はそれ以降に整理再編された。実数論はそれらよりもさらに新しい。整数を実数の中で捉える必要があり、実数を合理的に捉えるために平面幾何から叙述を始めたと見るのが正当であろう。

演繹的論証体系の基盤は、第一に定義（解釈の必要のない用語）の確定、第二に公理（論証を必要としない、あるいは論証できない基本的な命題）の定立である。原論では公理と公準に分けているが、本稿では公理として一括する。原論では必要となる定義は各巻の冒頭に掲げられているが、公理は第１巻以外にない。原論において第１巻は特別な意味がある。

原論第１巻の定義、公準、公理については、ここで詳述することは避けよう。ユークリッド原論の著者の意識では、定義に際しては、素材の語義を明確にするとともに、その実在性を是非とも示したかったと思われる。しかし、ユークリッドの時代には、その拠りどころを直観的映像に求めざるを得なかった。それには必然的に曖昧さが付きまとう。また、平行線公理と呼ばれる第５公準は、他の公準と比して異常に長いセンテンスで述べられている。そのためこれに関しては、以後２千年もの間、議論されたのは周知のことであろう。ユークリッド原論は厳しい目で見れば、必ずしも成功しなかったのである。２０世紀になってヒルベルトは、公理主義・形式主義の立場に立って、ユークリッド原論を再編し「幾何学基礎論」を著し、平行線問題に一応の解決を与えた。（後述）

結果論だが、問題を残しながらも、原論の著者は幾何学の基礎が何であるかは明示した。すなわち、
(1) 基本的素材が、点、直線、円、平面であること
(2) 基本量が長さと角（の大きさ）であること
(3) 基本操作が直線を引くことと円を描くこと
である。(3) は作図問題に関連する。

論理展開における原論の難点は、第一に量としての「角」が不明確であり、もう一つの量である「長さ」とは別種のものであること、第二に合同や相似の概念が曖昧であることである。次節以降で述べるように、これらは複素数を通すことで解決する。１９世紀の解析学がこれを可能にしているのである。

3．数体系としての複素数全体

これ以降、複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表わし、実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表わす。複素数の世界（１）で解説したことを簡単に復習しておこう。

幾何学を離れ、純粋に数として、数体系 K に対して行う操作は、次の二つの演算である。
(1)K の元を係数とする代数方程式の解を求めること。
(2)K の元からなる数列の極限値を求めること。
(2) を厳密に言えば、収束すべき数列の極限値であるが、収束すべき数列とは Cauchy 列（基本列）である。数概念の拡張とは (1) の解と (2) の極限値を数として認めることを指導理念とした。一次方程式を解くことができるとは K が四則演算で閉じていることである。従って、自然数全体から出発すれば、有理数全体を数として認めることになる。小学算数では（正の数に限定はするが）ここまでを数として認める。歴史的発展順序とは異なるが、(2) の方法で有理数全体から数概念を拡張させると実数全体にたどり着く。しかし、実数係数の代数方程式の解は、二次方程式であってさえ、必ずしも実数の範囲にはない。実数全体の集合に虚数単位 i を含んだ数体系として $\mathbb{C}$ が得られるが、これは (1) の要求にも (2) の要求にも応えている。すなわち、数体系としての複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ は自然数全体を含む数体系としては、(1) と (2) の操作について閉じている最小の数体系である。

複素数 α は異なる二つの表わし方をもつ。（いずれの場合も i は虚数単位。）
(1) $\alpha = x + iy$、 ここで x と y は実数。
このとき x を α の実部、y を α の虚部という。$\overline{\alpha}$ で α の（複素）共役を表わす。$\alpha\cdot\overline{\alpha} = x^2 + y^2$ は非負の実数となる。$r^2 = x^2 + y^2$；$r \geq 0$ なる実数 r は一意に定まる。これを $|\alpha|$ で表わし、α の絶対値という。
(2)（極形式表示） $\alpha = r\exp(i\theta)$、 ここで $r = |\alpha|$ で θ は実数。この表示では $\alpha = 0$ のとき、θ は定めない。$\alpha \neq 0$ のときは、$\exp(z)$ は周期 $2\pi i$ をもつ周期関数だから、θ は一意的には決まらないが、法 2π で一意的に決まる。それを $\arg(\alpha)$ で表し、α の偏角という。また、$a \in \mathbb{R}$ を固定するとき、$a \leq \theta < a + 2\pi$ となる θ は一意に決まる。これを $\mathrm{Arg}_a(\alpha)$ で表わす。$a = 0$ のときは、単に $\mathrm{Arg}(\alpha)$ と書く。なお、ここでの π を円周率と呼ぶが、この段階では円周率に幾何学的意味はない。

4．複素平面

$\mathbb{C}$ に幾何学的表象を与えよう。具体的には、点、直線、三角形、円；（２点間の）距離、（互いに異なる３点のなす）有向角、等を以下のように定義する。

(1) $\mathbb{C}$ の各元 (複素数) を点と呼ぶ。

(2) 異なる２点 α と β に対して、集合 $\ell(\alpha,\beta) = \{(1-t)\alpha + t\beta \,;\, s \in \mathbb{R}\}$ を α と β を結ぶ直線、集合 $L(\alpha,\beta) = \{(1-t)\alpha + t\beta \,;\, 0 \leq s \leq 1\}$ を α と β を両端とする線分と呼ぶ。

(3) α、β、γが同一直線上にないとき、互いに独立であるという。

(4) 互いに独立である３点 α、β、γに対して、集合 $\Delta = \{a\alpha + b\beta + c\gamma \,;\, a + b + c = 1\,,\, 0 \leq a, b, c \leq 1\}$ を α、β、γ を頂点とする三角形という。

(5) ２点 α、β に対して、絶対値 $|\alpha - \beta|$ を α と β の距離という。

(6) 互いに異なる3点 α、β、γ に対して、$\arg\left(\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)=\arg(\beta-\gamma)-\arg(\alpha-\gamma)$ を $\angle(\alpha,\gamma,\beta)$ で表わし、3点 α、γ、β のなす有向角という。2π を法として、$\angle(\beta,\gamma,\alpha)\equiv-\angle(\alpha,\gamma,\beta)$ に注意。また、前節と同じように、$\mathrm{Arg}_a\left(\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)$ 等の表わし方もする。

(7) $\alpha\in\mathbb{C}$、$r>0$ に対して、集合 $C(\alpha;r)=\{\xi\in\mathbb{C}\ ;\ |\xi-\alpha|=r\}$ を α を中心。半径 r の円という。

(8) 以上の概念を込みにして考えた集合 $\mathbb{C}$ を複素数平面、あるいは、複素平面と呼ぶ。

(9) 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の2直線 ℓ_1 と ℓ_2 は $\ell_1=\ell_2$ であるか、または、$\ell_1\cap\ell_2=\varnothing$ のとき、平行であるという。

以上の設定から容易に下記のことがらが証明される。

Theorem 4.1 (余弦定理)

$$|\beta-\gamma|^2 = |\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2 -2|\alpha-\beta|\cdot|\alpha-\gamma|\cos\Big(\arg\Big(\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\Big)\Big)$$

Theorem 4.2 (三平方の定理) 3点 α、β、γ が互いに独立であるとき、$\arg\left(\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)\equiv\pm\dfrac{\pi}{2}$ となるための条件は、$|\beta-\gamma|^2=|\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2$。

Theorem 4.3 複素平面は $|\beta-\gamma|$ を2点 β、γ の間の距離とする距離空間である。

5. 合同変換群

複素平面上の変換 G が 合同変換 とは、任意の2点 ζと ξについて、$|G(\zeta)-G(\xi)|=|\zeta-\zeta|$ をみたすことをいう。複素平面上の合同変換全体の集合を $\mathfrak{G}$ で表わす。合同変換の合成はまた合同変換だから、$\mathfrak{G}$ は変換の合成を積として、恒等変換 E を単位元とする半群をなす。

$\alpha\in\mathbb{C}$ および $\theta\in\mathbb{R}$ について、

$$S_\alpha(\xi)=\xi+\alpha,\ R_\theta(\xi)=\xi\exp(i\theta)\ ,\ T(\xi)=(\bar{\xi})$$

で定められる変換 S_α、R_θ、T は合同変換である。これらを順に、平行移動、回転、反転という。

平行移動、回転、反転はいずれも逆元をもつから、それらの有限個の積で表わされる合同変換全体 $\mathfrak{G}_0$ は $\mathfrak{G}$ の部分群をなす。実は次のことが成り立つ。

Theorem 5.1 $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0$。

換言すれば、$\mathfrak{G}$ は平行移動、(原点を中心とする) 回転、および、(実軸に関する) 反転によって生成される群である。これを 合同変換群 という。

この定理によって、原点0を不変にする合同変換は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{C}$ の線形写像となることを注意しておこう。

上記の定理を証明する手順を述べよう。

(1) 異なる2点 α、β について、$\gamma\in L(\alpha,\beta)$ となる条件は、$|\alpha-\beta|=|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$ である。

(2) H が合同変換で、$H(0)=0$ をみたすとき、正の実数 r について、$H(r\alpha)=rH(\alpha)$ が成り立つ。

(3) H が合同変換で、$H(0)=0$、$H(1)=1$ をみたすとき、下記のいずれかが成り立つ。

(A) $H(\zeta)=\zeta\quad(\forall\zeta\in\mathbb{C}\ \text{ s.t. }\ |\zeta|=1)$

(B) $H(\zeta)=\bar{\zeta}\quad(\forall\zeta\in\mathbb{C}\ \text{ s.t. }\ |\zeta|=1)$

以上の (1)、(2)、(3) を準備すれば、任意の合同変換 G について、$G(0)=\alpha$ のとき、$(S_\alpha^{-1}\circ G)(0)=0$。$|(S_\alpha^{-1}\circ G)(1)|=1$ だから、$\exists\psi\in\mathbb{R}$ について、$(S_\alpha^{-1}\circ G)(1)=\exp(i\psi)$ と書ける。$H=R_\psi^{-1}\circ(S_\alpha^{-1}\circ G$ とおけば、H は上記 (3) の条件をみたす。(2) を考慮すると、H が (3) の (A) をみたす場合は恒等変換、(B) をみたす場合は反転である。

複素平面の部分集合を 図形 と呼ぶことにする。複素平面内の二つの図形 Γ と Λ が 合同 であるとは、合同変換 G があって、集合として $G(\Gamma)=\Lambda$ となることであると定義する。合同なる条件は同値関係である。

6. 円周角の定理

通常の初等幾何学での方法による垂直2等分線等の幾何学的概念を、複素平面の項で定義した対応する式に置き換えるだけで、次のことが証明される。

Theorem 6.1 互いに独立な3点 α、β、γ を頂点とする三角形 $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ に対して $|\delta-\alpha|=|\delta-\beta|=|\delta-\gamma|(:=r)$ をみたす点 δは一意的に存在する。

上述の δ を三角形 $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ の 外心 という。δ を中心とする半径 r の円 $C(\delta;r)$ を三角形 $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ の 外接円 という。

Definition 6.2 三角形 $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ の外心を δ とし、外接円の半径を r とする。$\alpha'_j=\alpha_j-\delta$ とおく。ある実数 a について、

$$\mathrm{Arg}_a(\alpha'_1)<\mathrm{Arg}_a(\alpha'_2)<\mathrm{Arg}_a(\alpha'_3)$$

となるとき、$\mathrm{sgn}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$ と定め、そうでないとき、$\mathrm{sgn}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=-1$ と定める。

定義から次が容易にわかる。

$$\mathrm{sgn}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathrm{sgn}(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)=\mathrm{sgn}(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2)$$

Definition 6.3 $\mathrm{sgn}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$ のとき、α_1、α_2、α_3 は 正の順に並んでいる という。

これらの概念を使って、円周角の定理は次のように述べられる。

Theorem 6.4 α_1、α_2、α_3 を互いに独立な３点とし、δ を $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ の外心とするとき次が成り立つ。

(1) $\mathrm{sgn}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$ のとき、

$$\mathrm{Arg}\Big(\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_3-\alpha_1}\Big)=\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\Big(\frac{\alpha_2-\delta}{\alpha_1-\delta}\Big)$$

(2) $\mathrm{sgn}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=-1$ のとき、

$$\mathrm{Arg}\Big(\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_3-\alpha_1}\Big)=\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\Big(\frac{\alpha_2-\delta}{\alpha_1-\delta}\Big)+\pi$$

直感的に言えば、直線 $\ell(\alpha_1,\alpha_2)$ に対して、外接円の中心 δと α_3 が同じ側にある場合が (1) で、反対側にある場合が (2) である。これらの関係を明示するのが $\mathrm{sgn}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ である。有向角の概念が上記の言い回しを可能にした。通常の初等幾何学で述べられる円周角の定理とは異なっている印象をもたれるだろうが、むしろ通常の初等幾何学ではこの点が直感に頼って不明確であったと考えるべきである。

上記の円周角の定理から、平行線公理に相当する次のことが導かれる。

Theorem 6.5 $\mathrm{sgn}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$ のとき、

$$\mathrm{Arg}\Big(\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_3-\alpha_1}\Big)、\mathrm{Arg}\Big(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_2}\Big)、\mathrm{Arg}\Big(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_4}\Big)$$

のいずれも π より小さい正数で、その総和は π である。

7．三角比と正弦定理

余弦定理から次が得られる。

Proposition 7.1 ３点 α、β、γ は互いに独立で $\mathrm{sgn}(\alpha,\beta,\gamma)=1$ とする。

$$\theta(\gamma)=\mathrm{Arg}\Big(\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\Big)、\theta(\alpha)=\mathrm{Arg}\Big(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\Big)$$

とおくとき、$\theta(\gamma)=\frac{\pi}{2}$ ならば、

$$\cos(\theta(\alpha))=\frac{|\gamma-\alpha|}{|\alpha-\beta|}\ ;\ \sin(\theta(\alpha))=\frac{|\gamma-\beta|}{|\alpha-\beta|}$$

下記の２つの命題は円周角の定理から得られる。

Proposition 7.2 ３点 α、β、γ は互いに独立で $\mathrm{sgn}(\alpha,\beta,\gamma)=1$ とする。$\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ の外心を δ とするとき、$\delta\in\ell(\alpha,\beta)$ ならば、$\mathrm{Arg}\Big(\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\Big)=\frac{\pi}{2}$

Proposition 7.3 ３点 α、β、γ は互いに独立で $\mathrm{sgn}(\alpha,\beta,\gamma)=1$ とする。$\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ の外接円の半径を r とするとき、$\theta(\gamma)=\mathrm{Arg}\Big(\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\Big)$ とおけば、

$$\frac{|\alpha-\beta|}{\sin(\theta(\gamma))}=2r$$

8．三角形の決定条件

Definition 8.1 ３点 α、β、γ は互いに独立で $\mathrm{sgn}(\alpha,\beta,\gamma)=1$ とする。$\theta(\gamma)=\mathrm{Arg}\Big(\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\Big)$、$\theta(\alpha)=\mathrm{Arg}\Big(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\Big)$、$\theta(\beta)=\mathrm{Arg}\Big(\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}\Big)$；

$$a=|\beta-\gamma|、b=|\gamma-\alpha|、c=|\alpha-\beta|$$

とおく。$\{a,b,c,\theta(\alpha),\theta(\beta),\theta(\gamma)\}$ を三角形 $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ の６要素という。

三角形の決定条件は余弦定理と正弦定理の結果である。

Theorem 8.2 ３点 α、β、γ は互いに独立で $\mathrm{sgn}(\alpha,\beta,\gamma)=1$ とする。下記の３条件はいずれも三角形 $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$ の６要素すべてを決定する。

(1) $\{a,b,c\}$ （三辺）
(2) $\{\theta(\alpha),b,c\}$ （二辺狭角）
(3) $\{\theta(\alpha),\theta(\beta),c\}$ （二角狭辺）

三角形の合同条件は、三角形の外心が原点となるように平行移動させた後に、回転や反転を施すことにより、三角形の決定条件に帰着させることによって得られる。

Theorem 8.3 ２つの三角形が合同である条件は、その６要素が等しいことである。特に、三辺が等しい場合、二辺狭角が等しい場合、二角狭辺が等しい場合は合同である。

9．相似変換群

複素平面上の変換 H が 相似変換 とは、定数 $d_H>0$ があって、任意の２点 ζ と ξ について、$|H(\zeta)-H(\xi)|=d_H|\zeta-\xi|$ をみたすことをいう。d_H を相似

変換 H の 相似定数 という。合同変換とは相似定数が 1 の相似変換である。

正の定数 a に対して、$M_a(\xi) = a\xi$ で定義される変換 M_a は相似変換であり、倍率 a の中心拡大変換と呼ばれる。

複素平面上の相似変換全体の集合を $\mathfrak{H}$ で表わす。合同変換と同様に、相似変換の合成はまた相似変換だから、$\mathfrak{H}$ は単位元をもつ半群をなす。実は次が成り立つ。

Theorem 9.1 $\mathfrak{H}$ は、平行移動、(原点を中心とする) 回転、(実軸に関する) 反転、および、中心拡大変換によって生成される群である。

Theorem(5.1) によりこの証明は直ちに得られる。相似変換 H に適当に平行移動を施すと、原点を固定する相似変換 H_1 が得られる。

$$H_2(\xi) = \frac{1}{d_H} H_1(\xi) = (M_{1 \triangleleft d_H} \circ H_1)(\xi)$$

で定義される H_2 は原点を固定する合同変換となるからである。

合同変換は長さを不変にする変換であったが、相似変換は角を不変にする変換である。詳しく言えば、次の通り。

Theorem 9.2 G を複素平面上の変換とする。G が相似変換であるための条件は、G は単射であって、互いに異なる 3 点 α、β、γ について、

$$\left|\mathrm{Arg}\Big(\frac{G(\gamma)-G(\beta)}{G(\gamma)-G(\alpha)}\Big)\right| = \left|\mathrm{Arg}\Big(\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\Big)\right|$$

が成り立つことである。

複素平面内の二つの図形 Γ と Λ が 相似 であるとは、相似変換 G があって、集合として $G(\Gamma) = \Lambda$ となることであると定義する。相似なる条件は同値関係である。

複素平面内の 2 つの三角形に適用すれば次のようになる。

Theorem 9.3 2 つの三角系の 6 要素を

$$\{\theta(\alpha)\ ,\ \theta(\beta)\ ,\ \theta(\gamma)\ ;\ a\ ,\ b\ ,\ c\}$$

$$\{\theta(\alpha')\ ,\ \theta(\beta')\ ,\ \theta(\gamma')\ ;\ a'\ ,\ b'\ ,\ c'\}$$

とする。このとき下記の条件は同値である。

(1) この 2 つの三角形が相似である。
(2) $a/a' = b/b' = c/c'$
(3) $a/a' = b/b'$ かつ $\theta(\gamma) = \theta(\gamma')$
(4) $\theta(\alpha) = \theta(\alpha')$、$\theta(\beta) = \theta(\beta')$、$\theta(\gamma) = \theta(\gamma')$ のうち 2 式が (従って 3 式とも) 成立する。

10. 作図の基本操作

複素平面上の定規の機能とは、異なる 2 点 α、β に対して、直線 $\ell(\alpha,\beta)$ を与えることであり、コンパスの機能とは、1 点 α と長さ $r(>0)$ に対して、円 $C(\alpha;r)$ を与えることである。通常、ある点 α を作図するとは、原点 0 と単位点 1 だけから出発して、それから決定される直線と円の交点を求めるという作業を有限回繰り返して得られることをいう。こうして得ることができる点に対応する複素数を 作図可能数 という。

作図の各ステップは次の 3 種の操作である。これを作図の基本操作という。

(1) $\ell(\alpha,\tau) \cap \ell(\gamma,\delta)$。($\ell(\alpha,\tau) \neq \ell(\gamma,\delta)$)
(2) $\ell(\alpha,\tau) \cap C(\gamma;|\delta|)$
(3) $C(\alpha,|\tau|) \cap C(\gamma;|\delta|)$。($C(\alpha,|\tau|) \neq C(\gamma;|\delta|)$)

直線や円の交点を求めることは、方程式の解を求めることに翻訳される。上記の作図の基本操作の場合には次のようになる。

Lemma 10.1
(1) の場合、解は一意的に定まり、α , τ , γ , δ の有理式として表わされる。
(2) の場合、その係数が $\{\alpha,\tau,\gamma,\delta,\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\gamma},\overline{\delta}\}$ の有理式であるような 2 次方程式の解であり、その個数は高々 2 個。
(3) の場合も (2) の場合と同様。

11. 作図可能数

以後、作図可能数全体の集合を Ω で表わす。興味の焦点は、Ω が、どういう演算で閉じているかを見ることである。そのためには、Lemma(10.1) から示唆されるように定規とコンパスで得られる円と直線を対応する式に表わして、その連立方程式を逐次解くことによって達成される。それをまとめると、

Proposition 11.1 Ω は、四則演算、共役複素数をとる操作、および、Ω の元を係数とする 2 次方程式の解を求める操作について閉じている。従って、Ω は $\mathbb{C}$ の部分体をなす。特に、有理数をすべて含む。

作図可能数の表示については次が成り立つ。

Theorem 11.2
(1) 有理数と演算記号 $+$、$-$、$\times$、$\div$、$\sqrt{\cdot}$ の有限個の組み合わせで表わされる複素数は作図可能数である。
(2) 作図可能数は、有理数と演算記号 $+$、$-$、$\times$、$\div$、$\sqrt{\cdot}$ の有限個の組み合わせで表わされる。

(1) は Proposition(11.1) による。示す必要があるならば、(2) だけである。数体 $K \subseteq L$ があれば、L

は K 上の（抽象）ベクトル空間と見ることができる。そのときの次元を $[L:K]$ で表わす。作図可能数は１０項で述べた基本操作を有限回繰り返して得られる。Lemma(10.1) を見ると、次のことに注意すればよい。

Lemma 11.3 数体 $K \subseteq L$ について、$[L:K]=2$ で、かつ、$K^\sigma = K$ ならば、$L^\sigma = L$。ここで σ は共役複素数をとる $\mathbb{C}$ の変換とし、$L^\sigma = \{\alpha^\sigma \ ; \ \alpha \in L\}$ と表わす。

このように作図可能数は特徴付けられたが、与えられた複素数が作図可能数であるか否かを判定するのは容易ではない。次は作図可能数であるための必要条件を与える。

Proposition 11.4 $\alpha \in \mathbb{C}$ および $\mathbb{Q}$ を含む、$\mathbb{C}$ の（包含関係の意味で）最小の部分体を $\mathbb{Q}(\alpha)$ で表わすとき、α が作図可能数であれば、$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ は 2 のべき乗である。

ここにおける $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ は α のみたすべき有理数係数の最小次数の多項式（これを α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式という）の次数に等しい。たとえば、$\alpha = \exp(2\pi i/3^2)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式の次数は $6 = 3(3-1)$ であるから、α は作図不能数である。一方、$\exp(2\pi i/3)$ は作図可能数である。このことは 角 $2\pi/3$ が３等分できないことを示す。また、$\sqrt[3]{2}$ の最小多項式は X^3-2 であるから、これも作図不能数である。前者は角の３等分問題、後者は立方体の倍積問題という古代ギリシャ以来の作図問題であった。このようにして初等幾何学で提起された問題は、対応する複素数の数論的性質に翻訳されて解決された。

古代ギリシャ人は無理数を発見した。しかし、彼らが実際に捉え得た無理数は作図可能数の範囲に留まっていた。古代ギリシャの作図問題はもう一つある。それは円積問題である。それは円周率 π の数論的性質の解明に他ならない。これについては別稿で解説する予定である。このようにある種の数学の問題は、作図可能数と複素数との間に。意味のある新たな数のクラスを要求する。より一般的に述べれば、複素数の階層構造を要求する。

12. ヒルベルトの幾何学基礎論

２項で述べたように、ユークリッド原論はつぶさに見れば、演繹的論証体系として完全ではなかった。数学の真理性をその実在性に求めたところに最大の問題があった。２０世紀後半期にはサボーの研究が現れた。彼の主張するところによれば、、ユークリッド原論においては、公理は仮言的なものであったという。この見解に同調する人も少なくないが、否定的に見る人も少なくない。否定する側では、それは現代の公理主義ないし形式主義の思想を読み込んでいると言う。間違いなく言えるのは、そうだとしても原論には不備があったこと、そして、公理主義・形式主義をテーゼとして首唱し、その主義に基づいて現実の数学を建設したのは、本項で述べるヒルベルトであったことである。

ヒルベルトが公理主義数学の着想を得たのは 1899 年のことだとされている。様々なところで、彼はこの着想を話しているようだが、1917 年には「公理論的思惟」と題する講演を行った。その中で「ユークリッド空間幾何学の全学問を単に解析学の手段のみによって完全に構成できる」と述べている。すでに１９世紀前半に平行線公理をめぐって、それまでもっとも信頼を置かれていた幾何学の基礎が揺らいでいた。ヒルベルトが生きた時代は、集合論にパラドクスが発見され、数学の危機が叫ばれていた。公理主義ないし形式主義は、無定義述語の概念を打ち出して、数学の危機を救おうとした。ヒルベルトはその主唱者である。公理論的立場では無定義述語の意義を大きく取り上げる必要があった。その実践の舞台として初等幾何学を選んだ。そして著したのは「幾何学基礎論」（1930 年）であった。彼にとってはこの方面での最初の著作だった。それだけに彼の主張は鮮明に出ている。その序文にもあるように、（彼にとって）公理主義的数学とは、「公理を設定し、かつ、その相互関係を論理的に分析する」ことである。それゆえ、公理の無矛盾性及び相互独立性は重大な問題となる。相互関係を重要視することは、その公理系に含まれる構成元素の何たるかを（少なくとも“それ自体”としては）問うことを放棄することになる。公理主義の立場では数学として問うことに意味がない。これがいわゆる「無定義述語」である。幾何学基礎論においては、第１章と第２章を公理論的初等幾何学の基礎の建設（公理系の設定、その無矛盾性・相互独立性の議論）にあて、その後の章では、それを前提にすれば、それだけで初等幾何学（射影幾何学も含む）の実質的内容とされていた諸定理が導かれることを示している。また、最終章で定規とコンパスによる作図問題を扱っている。

13. 数論と幾何学

幾何学基礎論は、公理論的数学の建設実践が目的であった。対象は幾何学に基本的に限定した。しかし、このようなやり方は、初等幾何学を論理的に安定させるのには有効であっても、あまりにも公理の論理的分析の比重が重く、かつ、数学の他の分野との関係を感じとりにくい憾みがある。この書における定規とコンパスによる作図問題は、あくまでも初等幾何学の枠で捉えられている。彼のこの著作に込めた思いは伝わるが、あまりにも思想的である感が拭えない。

１項で述べたように、古代ギリシャ数学でも、ピタゴラス派が活躍した黎明期には、数学の最基層に置かれるべきものは数論であった。その時期、経験的・直感的として低く見られていた幾何学は、透明な数論の上に築かれるべきものであった。無理数の発見を機にこの思想は破綻した。数論と幾何学の位置を逆転させて、今度は幾何学を全数学の基層に置くことになった。ユークリッド原論はその一大集成だった。この方針は冒頭の第１巻に重い負担をかけることになった。端的に言えば、相当に無理をした。逆に言えば、その論理的負担こそ原論の魅力となった。特に哲学思想的嗜好がある人々にとって。

古代ギリシャ時代には、現代のような簡便な代数記法も無かったし、また、無限論法を必要とする解析学も無かった。無理数を安定的に理解し、位置付ける方策も無かったから、古代ギリシャ人が採った方法は、ある意味では必然的だった。１９世紀になり、解析学が発展し、また、複素数への認識も高まった。本稿で述べたように、初等幾何学では不明確だった量としての角の概念も、合同変換群や相似変換群を捉えるための代数的装置も整った。こうして１９世紀後半には、数論と幾何学の位置関係は再び逆転した。古代以来、数学の発展は、数概念の発展および階層構造の明確化とほぼ同義だった。

２１世紀に入った今、１９世紀数学の成果としての初等幾何学を理解するためにとる方法としては、論理運用に過重に負担を強いる方法よりも、本稿で述べた方法の方が合理的ではなかろうか。加えるに、前者の方法は初等幾何学の中で閉じている。数学の他の分野との関係も考えやすい本稿の方法が、より適切ではなかろうか。作図問題は結局のところ、対応する複素数の数論的性質に帰着する。次稿で解説する予定の方程式の代数的可解性も数論の問題である。

参考文献

[1]佐藤英雄　複素数の世界（１）, 教育実践総合センター紀要　(2004),147-152.

[2]ユークリッド原論 ,共立出版（中村幸四郎他訳）

[3]ヒルベルト　幾何学基礎論 ,清水弘文堂（中村幸四郎訳）

本稿は [1] の続編である。なお、ヒルベルトの講演「公理論的思惟」は [3] に収められている。