群の導入 ～教員養成学部での試み～

Introduction to Group Theory at Teacher's College

佐藤英雄（和歌山大学教育学部）
Hideo SATO
藤田亮介 (和歌山工業高等専門学校一般科目)
Ryousuke FUJITA

2007年10月5日受理

概 要

前にも述べた[1]ように、教員養成学部における数学教育は「代数学」「解析学」「幾何学」が３本の柱と位置づけられている。中学高校の教員免許取得要件は、代数学、幾何学、解析学、確率・統計、コンピュータに区分され、その各群にわたって所要単位を取得することである。数、図形、関数との対応関係は明らかである。

しかし、実際の数学教育では、それらの相互関係が軽視されやすい。それに対して十分な理解をもつことが、中学・高校の数学教師に求められる数学的素養であり、それを与えることが教員養成学部の数学教育の責務である。中学高校の数学教師を目指す人々を対象とする教員養成学部の数学教育においてはきわめて重要である。自己批判も含め、これまでの教員養成学部の数学教育をあえて批判すれば、数学者養成を旨とした理学部型の講義をそのまま行ってきた。教免法上、代数学、幾何学、解析学等に講義内容が区分されているが、区分どころではなく分断して数学教育を行って来てはいなかっただろうか。教員養成学部における数学教育とはいかなるものであるべきか。題材と方法が問題にされるべきだが、従来、とかく「数学教育法」にのみ傾きがちで、題材については等閑視されてはいなかっただろうか。本稿では教員養成学部における群の導入を論じてみたい。群は導入の仕方によっては、抽象的議論に終始してしまうものではなく、それ自身十分美しいことを体得できる題材なのである。

【キーワード】対称群、対称変換群、２面体群、正多面体群

1. はじめに

数学における「群」の定義は、１つの演算とその演算に関する３つの公理を満たす集合であるとする。この定義やその後に続く抽象群の例は、数学的には大切であるかも知れないが、初めて学ぶ学習者にとっては非常にとっつきにくく、群という概念が身につくとは言い難い。誤解のないように述べておくと、我々は数学的厳密性の重要性を否定するものではない。むしろ、その厳密性から生ずる数学理論体系の見事さや美しさを学習者にも何とか体得して欲しいと考えている。学習者は、教授者を通して、できるだけ早く理解したいのである。そこで、群論導入における、より具体的な方法を提案したい。

歴史的にいえば、「群」という概念は、19世紀前半、ガロアによる代数方程式の可解性の研究から生まれた。同時代アーベルは、一般５次代数方程式はベキ根によっては解けないことを証明しているが、ガロアとの違いは、前者が群という意識がないのに対して、後者が根の置換の集合を考えることにより、(対称) 群という概念に到達していることである。群はそもそも方程式や幾何学図形などのように目に見えるものとして発見されたものではなく、数学的事象の奥深くに存在するものとして発見された[3]。

「群」とは、一言でいえば“対称性 (シンメトリー)”を記述する数学的概念である。その意味で、ガロアは代数方程式の根の集合に対称性を見出したのである。

「群」という概念を教える場合に、そこのところを何とか伝えたい。それが核心であり、美しい対象物 (対称性が多く見受けられる物という意味において) には群構造が潜んでいることが多いのである。実際、数学の種々の分野の中に、いろいろな形で群構造が見出されている。しかも極めて自然に美しく存在している。群論の導入の際には、それが単なる抽象概念ではないということを強く認識させるべきである。誰もが容易に描ける身近な図形、あるいは触れることのできる図形の中に、それを自然に見出すことができるし、見出せなければならないのである。特に教員養成学部においては、そういう体験を講義の中で提供すべきである。我々は、具体的に「群」という概念を講義するときの１つの導入提案を示したい。すべての学生はわかりたいのである、ならばわからせてみせようという気持ちが我々の根底にある。数学概念をわかる、さらにあるいはそのことにより何かしらの感動を覚えるということは、将来学生達が教える立場になったときにも必ず生きてくると信じたい。

また、昨今教育学部では現職教員の再教育の場という側面も求められている。現場で何十年も教職に就いている現役の先生方への数学内容の指導ということを考えたときにも、本稿での提案が少なからずヒントになるのではないだろうか。

本稿で、取り上げるのは「2 面体群」及び「正多面体群」である。この２種類の群は図示しながら説明を加えていけば (すなわち、視覚に訴えていけば)、とっつきやすく、非常に説明がしやすいと思われる。しかも、自分で容易に確かめることが出来るのである。さらに、これらの群の中に、群論の本質的な定理や様々な群を見出すこともできるので教材として適当であると思われる。以下、具体的に導入を試みる。

2．2面体群の構成

「群」の具体例として、誰でもとっつき易いものとして「2 面体群」を登場させたい。抽象的にも説明は可能であるが、特に視覚に訴えてわかりやすくという観点から説明を試みる。まず集合 X から X へ全単射写像全体を考える。この集合は、合成という演算に関して「群の公理」を満たすから群になり、これを X 上の対称群という。$S(X)$ と書く。また、X 上の対称群の部分群を X 上の置換群といい、各元を置換という。恒等変換は１つの置換であって、本稿では単位置換と呼ぶことにする。特に、X が n 個の有限集合のとき、S_n と書き、位数は $n!$ である。これを n 次対称群という。S_n は偶置換、奇置換の各集合の非交和に分解されるが、このうち偶置換の集合は群をなす。これを n 次交代群といい、A_n と書く。さらに、平面または空間の図形を、中心を固定する、それ自身への全単射写像をその図形の対称変換という。対称変換全体は群をなし、それを対称変換群という。

π を１つの平面とし、これを点の集合と考える。π の２点 P, Q の距離を $d(P,Q)$ と表す。写像 $\varphi : \pi \to \pi$ が全単射であって、π の２点 P, Q に対して

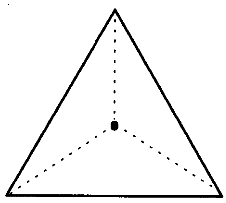
$$d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)$$

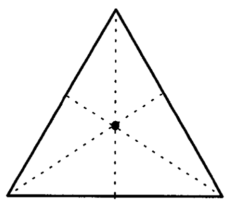
が成り立つとき、φ を π の運動という。すなわち、距離を不変にする変換のことである。例えば、平面上のあるベクトルだけの平行移動, 1 点の周りの回転, ある直線に関する対称移動 (これを鏡映ともいう) 等はいずれも π の運動である。２つの運動の合成や逆写像はまた運動である。各点が不動の場合、すなわち静止している場合も運動の１つになることに注意すると、π の運動全体の集合は群になる。明らかに運動の全体は $S(\pi)$ の１つの部分群をつくる。この群を平面 π の運動群という。さらに、平面上に１つの正 n 多角形が与えられたとき、この正 n 多角形のシンメトリーとは、この図形をそれ自身に重ねるような平面の運動のことをいう。明らかに、与えられた正 n 多角形のシンメトリー全体は、運動群の１つの部分群をつくる。この群を D_{2n} とかいて、n 次 **2 面体群**という。n 次２面体群を D_n とかく流儀もあるようだが、本稿ではその位数を意識して $2n$ と記す。つまり、

$$D_{2n} \subset \pi \text{ の運動群 } \subset S(\pi)$$

という包含関係になっている。

正３角形の場合に、具体的に描写してみよう。下の図を見られたい。σ は正３角形の中心の周りに 120° 回転する運動, $\tau_i (i = 1, 2, 3)$ は各辺の垂直二等分線を対称軸とする鏡映とする。このとき、σ^2 は 240° 回転である。σ^3 は 360° 回転を表すが、正３角形上の任意の点を元に戻すので、結果的に静止している。静止する回転 (=0° 回転) を e と書くと、$e = \sigma^3$ である。σ^4 などは 480° 回転であるが、$\sigma^4 = \sigma$ となっている。以下、回転を扱うときはいつもこのように考える。

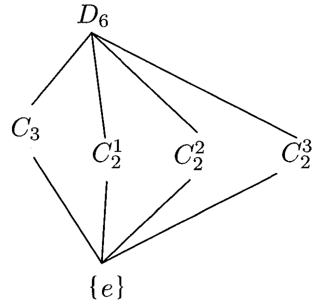




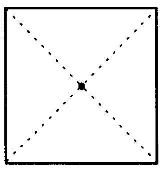
$D_6 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ となる。この例を解説するときの最大の留意点はこのような誰でもかける正三角形の中に、自然に“シンメトリー”が存在しているという事実を認識させることである。D_6 の６つの元のうち、$\{e, \sigma, \sigma^2\}$ を取り出してみると、(乗積表より合成という演算について閉じているので) 群をなすことがわかる。これを位数３の巡回群といい、C_3 とかくこと

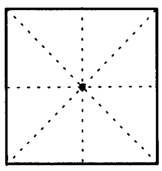
にする。したがって、C_3 は D_6 の部分群であり、しかも $\tau_i\sigma\tau_i^{-1} \in C_3\,(i=1,2,3)$ より、D_6 の正規部分群になっていることがわかる。同様に、$\{e,\tau_i\}\,(i=1,2,3)$ はいずれも位数 2 の巡回群となる (いずれも D_6 の正規部分群ではない)。以上より、D_6 の自明でない部分群は位数 3 の巡回群が 1 つと、位数 2 の巡回群が 3 つ存在することがわかる。$\tau_1^{-1}\sigma\tau_1 = \sigma^{-1}$ より $\sigma\tau_1 = \tau_1\sigma^{-1} = \tau_1\sigma^2$ となるから、D_6 は非可換である。ちなみに D_6 は位数最小の非可換群である。

位数 2 の巡回部分群は 3 つあるから、それぞれを区別して、$C_2^j\,(j=1,2,3)$ とおく。$AB = \{ab \mid a \in A,\, b \in B\}$ と定義すると、計算により $C_3C_2^j = C_2^jC_3 = D_6\,(j=1,2,3)$ となることがわかる。よって、D_6 は C_3 と C_2^j の半直積である。D_6 の部分群の包含関係に関するハッセ図は以下のようになっている。



次に正方形について、その 2 面体群を求めよう。





この場合は $D_8 = \{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}$ となる。ここで、σ は正方形の中心の周りに 90° 回転する運動, $\tau_i(i=1,2,3,4)$ は各辺の垂直二等分線及び対角線を対称軸とする鏡映である。D_8 の部分群を求めるのは適当な練習問題になるはずである。そしてこれら 2 つの 2 面体群を導入した後に、一般の 2 面体群 D_{2n} を類推させるのである。実際の定義は次の通り。

Definition 2.1 σ を正 n 角形の中心の周りに $\frac{360°}{n}$ 回転する運動, $\tau_i(i=1,2,\cdots,n)$ を n が奇数のときは各辺の垂直二等分線, n が偶数のときは各辺の垂直二等分線及び対角線の鏡映とする。そのとき、n 次 *2* 面体群 D_{2n} とは

$$\{e,\sigma,\cdots,\sigma^{n-1},\tau_1,\cdots,\tau_n\}$$

なる集合であり、合成による演算に関する群構造をもつものである。

具体例を提示しているので、この定義は馴染み易くなっているはずである。実際の講義では $n=5,6$ の場合にも確認してみせることも必要である。

さらに、次の 2 面体群の構造定理が成り立つ。

Theorem 2.2 n 次 *2* 面体群 D_{2n} は関係式

$$a^n = b^2 = e,\ \ b^{-1}ab = a^{-1}$$

を満たす *2* つの生成元 a,b をもつ位数 $2n$ の群で、その全ての元は

$$a^ib^j\ (i=0,1,\cdots,n-1;j=0,1)$$

の形に表される。

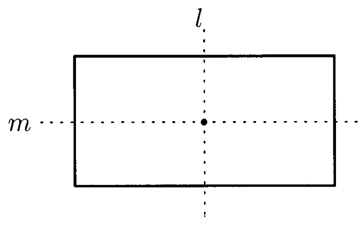
さて、ここまでの議論を踏まえて、次の問題を投げ掛けてもよいであろう。

問題：「ある図形 X の対称変換群は、X の頂点集合上の置換群であるか?」

直感的にも答えは YES であるが、この証明を考えるのは適当な演習問題になるであろう。

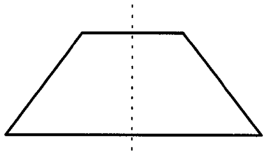
さて、実際の講義展開の中で、「長方形やあるいは台形、あるいはもっと一般に不等辺多角形に対応する群は存在するのだろうか、あるいはその正体は何か?」という疑問は極めて自然なものであろう。実はそういう疑問こそが、群論の本質をついているとも言えるのである。学生側から質問がない場合でも、教授側から問題提示しても面白い。ここで少し解説を試みてみよう。

不等辺多角形、特に不等辺四角形は全ての辺や角が不均等であり、誰がみても対称性があるとは言い難いことからも類推できるが、単位群 (=単位元のみからなる群) である。正確にはその中心に関する回転を見出すにも、その中心自体が有り得ないし、線対称も存在しない。つまり、一番対称性が少ない四角形である。これに対して、正方形は一番対称性のある四角形である。既述の通り、正方形に対応する群は D_8 である。長方形はどうであろうか。長方形の場合は、以下の図の通り、2 本の線対称軸 l,m が存在する。



この場合は、中心の周りの 180° 回転、360° 回転 (=元に戻る回転) と l に関する対称移動 τ_1, m に関する対称移動 τ_2 がすぐ見出せる。このうち、中心の周りの 180° 回転は合成 $\tau_1\tau_2(=\tau_2\tau_1)$ と一致している。結局、これら 4 つの元からなる群になる。線対称移動

は 2 回続けると元に戻る。中心の周りの 180° 回転も 2 回続けると 360° 回転、すなわち、元に戻る。よって、単位元以外の元の位数は 2 である。この群をクラインの四元群という。通常これを V で表す。次に等脚台形について、その群を求めよう。次図の通り、



この場合は図に示した 1 つの線対称移動が存在する。単位元と合せると、2 つの元からなる群であることが分かる。

このように通常の代数学のテキストに取り上げられている 2 面体群以外に、具体例を示しながら学生達に投げかけていく。以下に小学校で登場する四角形に対応する群を一覧にまとめておく。

四角形	群
不等辺四角形	単位群
平行四辺形	C_2
等脚台形	C_2
長方形	V
ひし形	V
正方形	D_8

ここで、V は既述のクラインの四元群である。V を D_4 と書くこともある。つまり、長方形やひし形の対称変換群を仮想的な“正 2 角形”と見なしている。同様に、C_2 は正 1 角形の対称変換群と考えて、D_2 としても定義できる。

3. 正多面体群へ

「2 面体群」を十分習熟した上で、次に 3 次元バージョンである「正多面体群」を登場させるのは極めて自然であろう。学生達は少なくとも中学時代に、実際に正多面体を作った者も少なからずいるはずである。また、正多角形は無限個あるのに対して、正多面体はよく知られているように正 4 面体、正 6 面体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体の 5 種類だけが存在する。それぞれの正多面体の頂点, 辺, 面の関係は次の表のようになっている。

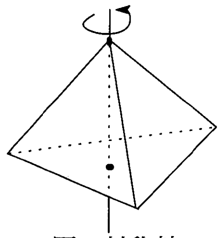
正多面体	面の形	頂点	辺	面
正 4 面体	正 3 角形	4	6	4
正 6 面体	正 4 角形	8	12	6
正 8 面体	正 3 角形	6	12	8
正 12 面体	正 5 角形	20	30	12
正 20 面体	正 3 角形	12	30	20

正多面体を、それと合同な位置にもたらすような中心の周りの回転の全体は 1 つの有限群をつくる。この群を正多面体群という。すなわち、正多面体上の対称変換群のことである。正多面体群に属する回転軸を、正多面体の対称軸という。n 回の対称軸とは、中心の周りに n 回の回転で元の位置に戻る対称軸をいう。正多面体は 5 種類しかないから、正多面体群も高々5 種類しかないことが分かる。実は 3 種類であることが容易に分かるが、1 つ 1 つ確認していく方が直接的で分かりやすいし、学ぶ側からすれば思考練習にもなるであろう。

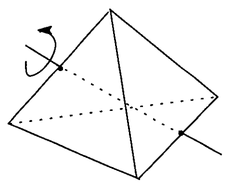
【正 4 面体群】正 4 面体の対称軸は、1 つの頂点と向かい合った面の中心を結ぶものが 4 本、相対する辺の中点を結ぶものが 3 本ある。前者の 4 本の対称軸のうち、単位置換と異なる回転が 2 個あり、後者の 3 本の対称軸のうち、1 つを回転軸とする回転が 1 個あるから正 4 面体群の位数は

$$2 \times 4 + 1 \times 3 + 1 = 12$$

である。以上を図で示せば以下の通りである。実際の講義ではこのような図を提示すると説明しやすい上に、学生も分かりやすいはずである。



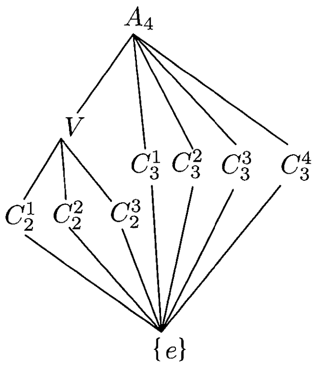
3 回の対称軸



2 回の対称軸

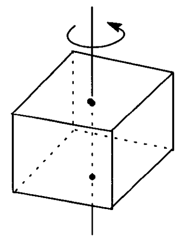
実は正四面体群は 4 次交代群 A_4(と同型) である。正 4 面体群を G として、上に挙げた元を A_4 の 12 個の元と実際に対応させてみればよい。もう少し、賢くやるならば、次にように考えればよい。G は 4 つの頂点の置換であることに注目して、4 次対称群 S_4 の部分群である。上図のように、3 回の対称軸は全部で 4 個あるが、置換で書けば $(1)(2\,3\,4)$ のように書くことが出来て、これは偶置換である。このような偶置換は全部で 8 個ある。また、2 回の対称軸は全部で 3 個ある。これは置換で書けば、$(1\,2)(3\,4)$ のように書けるので、これも偶置換である。単位置換も偶置換であるから、これら 12 個の元は全て偶置換であることが分かった。すなわち、G は 4 次交代群 A_4 の部分群である。さらに A_4 の位数は S_4 の半分、$4! \div 2 = 12$ であることを考え合わせると、G は A_4(と同型) である。真部分群は 8 つある。また、よく知られているように A_4 には位数 6 の部分群は存在しない。正四面体の対称軸の図を見ながら、ハッセ図を考えよう。すなわち、3 回の対称軸から $C_3^1, C_3^2, C_3^3, C_3^4$ が登場し、2 回の対称軸から V とその部分群である C_2^1, C_2^2, C_2^3 が産

出される。A_4 のハッセ図は次のようになっている。

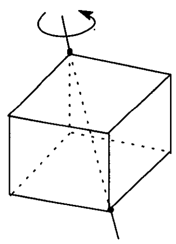


このような部分群の包含関係を考えることは群の理解を深めることにもなるであろう。これらの部分群の系列の中で、例えば、$C_2^1 \subset V \subset A_4$ を見ると、V は A_4 の正規部分群であり、C_2^1 は V の正規部分群であることがわかる。しかし、C_2^1 は A_4 の正規部分群ではない。つまり、3 つの群の系列 $K \triangleleft H \triangleleft G$ に対して、$K \triangleleft G$ が成り立つとは限らないのである。ここで、$H \triangleleft G$ は「H が G の正規部分群である」ことを示す。

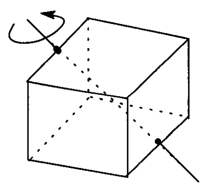
【正 6 面体群】対称軸は、向い合った面の中心同士を結ぶものが 3 本、各頂点と正 6 面体の中心を結ぶものが 4 本、相対する辺の中点を結ぶものが 6 本ある。



4 回の対称軸



3 回の対称軸



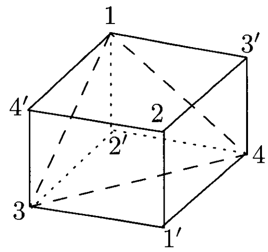
2 回の対称軸

したがって、正 6 面体群の位数は

$$3 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 6 + 1 = 24$$

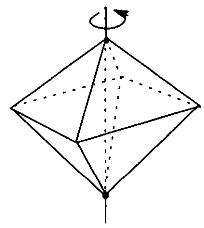
である。正 6 面体群は S_4(と同型) である。正 6 面体群の 1 つ 1 つの元を S_4 の 24 個の元と実際に対応させてみればよい。次のようにも証明できる。正 6 面体群を G とする。G の各元は、正 6 面体の中心に対して相対する頂点を結んで出来る 4 本の対角線に対する置換と見なせる。実際、4 回の対称軸を見てみると、90° 回転、180° 回転、270° 回転、360° 回転は全て置換になっている。他の対称軸でも同じである。つまり、G は S_4 の部分群であることが分かる。位数は 24 であるから、G は S_4(と同型) である。

また、次図は正 6 面体の中に正 4 面体を考えようとしたものである。

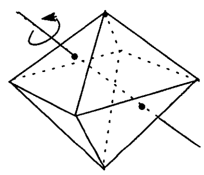


正 4 面体 (1234) と正 4 面体 (1′2′3′4′) は互いに鏡像体になっている。前者を後者へ移す回転 σ を取ると、これは奇置換である。正 6 面体群における正 4 面体群の指数は 2 であるから、正 4 面体群を正 6 面体群の部分群と見て H とおけば、正 6 面体群 G は H と σH の非交和になっている。

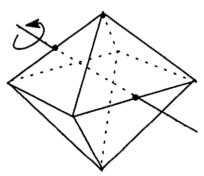
【正 8 面体群】対称軸は、向い合った頂点同士を結ぶものが 3 本、相対する面の中心を結ぶものが 4 本、相対する辺の中点を結ぶものが 6 本ある。



4 回の対称軸



3 回の対称軸



2 回の対称軸

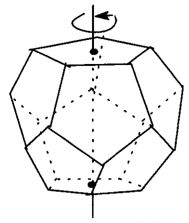
したがって、正 8 面体群の位数は

$$3 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 6 + 1 = 24$$

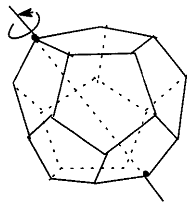
である。上式は正 6 面体の場合と全く同じである。正 8 面体群は正 6 面体と対になっていることから、正 6 面体群、つまり S_4(と同型) である。対になっていることも実際に図で説明する方がよいだろう。このことをもう少し詳しく言えば、正 6 面体の 6 つの面の各中心を結ぶと、この正 6 面体の中に正 8 面体が生ずる。逆に、正 8 面体の 8 つの面の各中心を結ぶと、この正 8 面体の中に正 6 面体が生じている。したがって、

正6面体を不変にする回転は、内部にある正8面体を不変にするし、逆に正8面体を不変にする回転は、内部にある正6面体を不変にするのである。正12面体と正20面体でも同様である。一方、正4面体はどうかというと、実際書いてみれば分かるとおり、中にできるのはまた正4面体である。

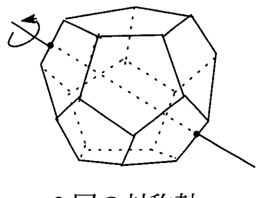
【正12面体群】まず図を観察しよう。



5回の対称軸



3回の対称軸



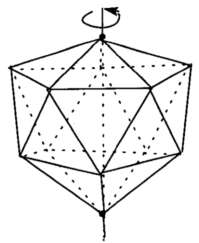
2回の対称軸

対称軸は、向い合った面の中心同士を結ぶものが6本、相対する頂点同士を結ぶものが10本、相対する辺の中点を結ぶものが15本ある。上図より、正12面体群の位数は

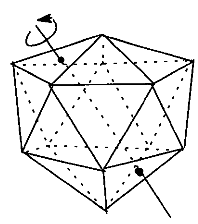
$$4 \times 6 + 2 \times 10 + 1 \times 15 + 1 = 60$$

である。

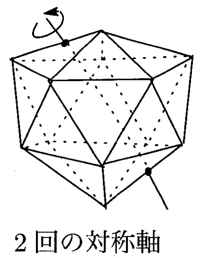
【正20面体群】正12面体と同様、図をじっくり観察しよう。



5回の対称軸



3回の対称軸



2回の対称軸

対称軸は、相対する頂点同士を結ぶものが6本、向い合った相対する面の中心同士を結ぶものが10本、相対する辺の中点を結ぶものが15本ある。正20面体群の位数は

$$4 \times 6 + 2 \times 10 + 1 \times 15 + 1 = 60$$

である。正20面体群は正12面体と対になっていることから、正12面体群と同型である。具体的に群を求めることは容易ではない。結論から言えば、正12面体群は A_5(と同型) である。証明は次節で取り上げよう。

正多面体群をまとめておこう。

正多面体	群	位数
正4面体	A_4	12
正6面体	S_4	24
正8面体	S_4	24
正12面体	A_5	60
正20面体	A_5	60

実際の講義では、各正多面体の図を描くよりも、むしろ厚紙等で正多面体を作らせるとよい。まず、じっくりそれらを観察することから対称軸を見い出させるべきである。なるべく学ぶ側から引き出せた方がよい。そうすることにより、学ばされているという意識から自分で学んでいるという意識へ変えていくことにつながるし、何より楽しいはずである。

4. 正12面体群と正20面体群

正12面体群あるいは正20面体群を求めるのはそう簡単ではない。ここでは、群論の知識を使うことにより求めてみよう。実際の講義においては証明は省いて結論だけを示してもよいと思われる。あるいは群論の応用として紹介してもよいであろう。

正12面体群の1つ1つの元を A_5 の60個の元と実際に対応させてみればよいが、正直言ってこの場合は実際的でないだろう。少し技巧的になるが、群論の定理を応用することにより見事に求めることが出来る。正12面体群を G とする。上図のように5回の対称軸は全部で6個ある。G の各元はこの6個の対称軸上の置換群と見なせることが分かる。実際、3回の対称軸を見てみると、$120°$ 回転、$240°$ 回転、$360°$ 回転は全て置換になっている。他の対称軸でも同じである。つまり、G は S_6 の部分群であることが分かる。

さらに、G が6次交代群 A_6 の部分群であることが次の議論により分かる。5回の対称軸に関しては、$72°, 144°, 216°, 288°$ と4つの回転がある。これらの回転は全て位数が5であるから、S_6 の元としては長さ5の巡回置換である。それゆえ、それらは偶置換である。面は全部で12個あり、各面とその対面を組

に対して、同様にして4個の偶置換が得られるから、全部で $4 \times 6 = 24$ 個の位数5の偶置換が得られる。

次に3回の対称軸に関しては、正12面体群をそれに同型な正20面体群として考えると、$2 \times 10 = 20$ 個の位数3の偶置換が得られる。最後に2回の対称軸に関しては、$1 \times 15 = 15$ 個の位数2の偶置換が得られる。これらの偶置換と単位置換を合せて、G の60個全ての元は偶置換である。G は S_6 の部分群であったから、実は A_6 の部分群であることが分かった。群論の一般論より A_6 の位数60の部分群は A_5 に同型になることが分かる。

あるいは次のように考えてもよい。2回の対称軸15本のうち、同一平面上にあるものを組にして考えると、各組は3本ずつからなる5組ができるはずである。これらを K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 とおく。正20面体群(あるいは正12面体群)G の各元は、この5つを置換しているから、G は S_5 の部分群である。さらに、前半の議論から A_5 の部分群であることが分かる。位数を比較することにより G は A_5 である。

5. あとがき

本稿では、教員養成学部における群の導入の1つの提案を示した。数学概念は一旦理解してしまえば、理解するまでの過程の苦労など直ぐに忘れてしまう。さらにより美しく、より抽象化してみたくなるのは数学研究者の常であろう。しかし、学ぶ側にしてみれば、1つ1つの数学概念とは初対面なのである。最近の大学全入時代到来、あるいは現職教員受け入れをはじめとする社会人の再教育という側面をも考えた時、従来の理学部型の抽象概念の紹介を主とする講義では対応できなくなってきている現実がある。もっと極端に言えば、教授する側も、早急に現状を十分把握した上で、相当な教材準備が必要であるということである。筆者の一人である佐藤は教員養成学部における数学教育とはいかなるものであるべきかという観点から、「複素数の世界」[1)2)] が適当な教材であることを提示した。それに加えて、我々は今回群の導入を論じてきた。最初に述べたように、数学において群論はそれ自体非常に重要であるし、至る所に登場する。だからこそ学生達にしっかりと身に付けさせなければならないのである。その過程において、出来得る限り、より具体性を持たせる必要性を感じる。そういう観点から、我々は群を、2面体群及び正多面体群を通して、「対称変換群」として最初から導入する方法を提示した。もちろん、これだけに終わってしまってはいけない。さらに気付きにくい「対称性」を考えさせなければならない。群論の源泉であるガロア理論もその射程の先にあるはずである。その過程に数学の美しさが見出されるということも、出来る限りゼミ等では教えるべき(というより体得させるべき)である。例えば、参考文献[5)] は、適当なテキストになると思われる。

初学者にとって、数学の定理や証明はそれ自体非常に美しく整然として映る。それゆえ、非常にとっつきにくく、難しく見えることがしばしばである。しかしながら、そこに至るまでの過程には、とてつもない泥臭い計算や試行錯誤が隠されていることが多い。数学研究者はそれを少なからず経験しているはずである。それゆえ、数学概念を初めて学ぶ者は皆等しく白紙の状態であると仮定して教授すべきである。そう考えないと不公平ではないだろうか。実際にはそれまでの経験や勉強を通した予備知識を兼ね備えていることが多いが、特に多人数の学生を教える場合には白紙として教えるべではないだろうか。その視点に立ったとき、どうすればその概念をより分かりやすく説明できるかが問題になってくる。今後ますますその点は無視できなくなってくるであろう。今回紹介した群の導入方法は適切であると筆者らは信じている。

参考文献

[1] 佐藤英雄, 複素数の世界 (1), 教育実践総合センター紀要 (2004),147-152.

[2] 佐藤英雄, 複素数の世界 (2), 和歌山大学教育学部紀要 (2006),51-57.

[3] 原田耕一郎, 群の発見, 岩波書店 (2001).

[4] 松坂和夫, 代数系入門, 岩波書店 (1976).

[5] S.V.Duzhin and B.D.Chebotarevsky., *Transformation Groups for Beginners*, American Mathematical Society(2004).

なお、[5] の日本語訳は「変換群入門」(雪田修一 日本語版監修, 名倉真紀 訳, Springer) として出版されている。

(参考) 5次交代群 A_5 の部分群

A_5 には4次の交代群 A_4, 位数 10, 6, 4 の2面体群 D_{10}, D_6, D_4, 位数 5, 3, 2 の巡回群 C_5, C_3, C_2, と単位群 $\{e\}$ が部分群として含まれているが、A_5 の任意の部分群はそれらのどれかに共役であることが知られている。部分群 H の $G = A_5$ における正規化群を $N_G(H)$ と表すとき、

$$N_G(C_2) = D_4, \qquad N_G(C_3) = D_6$$
$$N_G(D_4) = A_4, \qquad N_G(C_5) = D_{10}$$

である。$S(G)/G$ のハッセ図は次の通りである。ここで、$S(G)$ は G の部分群全体の集合で、G の共役作用

により G 集合と見ている。また、$(H),(K) \in S(G)/G$ に対して、$H \subset g^{-1}Kg$ となる $g \in G$ が存在するときに限り、$(H) \leq (K)$ と定義する。