中等数学のカリキュラムへの視点（２）

A View Point of Curriculum of Mathematics (2)

佐藤英雄（和歌山大学教育学部）
Hideo SATO

概 要

前稿 [1] では現行の中学・高校の数学の指導要領に盛られている内容のうち、代数的な部分と初等幾何的部分について検討した。後者については、実数体上２次元あるいは３次元のベクトル的手法によるものまで言及した。１９世紀的数学の枠組みで、中学・高校の数学を分類すれば、残るもので主要なものは微分積分である。中学校の数学では関数概念の萌芽について触れられているが、極限的操作に関係しているところはない。本稿では高校の微分積分について述べる。

カリキュラムを検討する前提は、第一にその対象範囲、第二にその範囲を扱うのに必要な手法を確定させることである。前段で述べたことから、この作業は、素材および手法の両面について、結局は、高校までと大学初年次以降のものとに区分することに相当する。大学初年次の微分積分には入れられて、高校の微分積分には含まれていないのは、素材としては複素数と逆三角関数で、手法としては無限級数である。後者については、高校まででは実数論を前面に出すことはできないからである。両方に関わるものとしては、複素数全体を代数と幾何の両構造の統一体として見る思想であり、その運用である。高校数学までの範囲では、角（ラディアン角）の概念は不明瞭のままにおかれるのは、それゆえのことである。([1]、[2] 参照)

上述の高校数学の微分積分の不備に対応できるようになったのは、１９世紀ヨーロッパにおいてであった。高校数学の微分積分の内容は、不備なところはあったものの１８世紀末までにすでに得られていた。不備をカバーしたのは、極限の議論も含め直観的な初等幾何的考察だった。１８世紀から１９世紀にかけての数学史をたどってみれば、不備克服が容易でなかったことを認めざるを得ない。それを高校数学に持ち込むのは暴挙である。

本稿の目的は、将来の数学教員に上述の不備の実際を納得させることと、１８世紀までの数学の知恵を生かし、現行の高校の微分積分の内容を、高校生にいかに無理なく直観で切り抜けるすべを見せることである。これは中等数学科教育法の一つの課題である。

【キーワード】高校微分積分の範囲、初等幾何学的直観的把握、極限概念の理論的把握

1. 高校微分積分の素材となる関数

高校微分積分の範囲は数学史的に言えば、１８世紀末までに得られた微分積分の内容（の一部）とほぼ一致する。言い換えれば、極限概念は未整備で、実数論に相当することは曖昧な図形的直観に依拠していた時代の産物である。こうして登場させられた関数は、有理関数をはみ出したものとしては、実用性から生まれた三角関数、および、指数関数、その逆関数である対数関数に基本的には限定されていた。それもすべて実関数として扱われたにすぎない。それでも奔放な計算によってだが、テーラーないしマクローリン展開は考察されたが、極限概念が未整備なこの段階では、関数概念を巾級数から出発させ組織的に考察する発想は出てこなかった。複素変数の関数も基本的には現われなかったのは当然である。

この段階では、三角関数 $\cos(\theta)$、$\sin(\theta)$ 、$\tan(\theta)$ は実用幾何的な三角比の拡張として得られたものであって、角の概念はラディアン角であっても、曖昧なユークリッド風の図形的観念で束縛されていた。一

方、$a>0$ を底とする指数関数 a^x は指数法則の拡張として得られたもので、実数概念の未整備なこの段階では、自然対数の底 e は、関数 $y=a^x$ が $x=0$ で微分可能だとして、その微分係数が 1 になるような a の値として得られたものと想像される。そうだとして話を進めるが、この考察は、関数 $y=a^x$ のグラフの図形的観察に基づいている

このように三角関数と指数関数は出自が異なるが、これらは Euler の公式　$\exp(i\theta)=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ により見事に結びつく。ただし、これは、指数関数、三角関数のマクローリン展開の奔放な計算によって得られたに過ぎない。

対数関数 $\log(x)$ はネピアによって導入されたものである。時は大航海時代、天文測定から洋上の船の位置を知るために、天文学的計算をする必要に迫られた。ネピアのアイディアは、掛け算を足し算に変換し、桁数の小さい計算で済ませることだった。それは指数関数の逆関数たる対数関数を考察することに他ならない。ネピアはそのために常用対数表を作った。

本節を要約しよう。

高校の微分積分に登場する関数は、多項式関数、三角関数、指数関数、対数関数等で、これらは実用数学的要求から生まれた。従って、その発生は散発的かつ相互無関係だった。これらの関数を統一的に取り扱うことができるためには、無限級数（特に巾級数）、複素数等の基盤整備が必要だったが、１８世紀末までの数学には、その前提となる実数論さえ欠いていた。

2．　基本概念と基本公式

解析学の基本概念たる極限概念は、厳密には実数論に基づかねばならないから、それを欠いた高校数学では、関数の連続性、微分可能性、（定）積分可能性等を精密に述べることはできない。これらを完全に無視したままでは、高校の微分積分を曖昧にさえ述べることはできない。極限概念が曖昧なままでも微分積分は進展してきた。本来、精密な極限概念による議論が必要なところを、曖昧だけれども直観に認容される初等幾何学的観念で切り抜けてきた。（これについては詳しくは次節以降で述べる。）

著者は現代的な立場から見ると不完全になることを必ずしも拒否しない。むしろ、学習過程上では、ある程度、曖昧さを容認した方がよいと考える。その段階では完全性は言わば病的なもので、誰もが想定すらしていないとすれば、不完全であることがむしろ自然である。不完全と誤りとは異なる。不完全なものが誤りではなく、不完全と認識せざるを得ない状況が発生したときに、不完全であった状況を定式化して条件を整備すれば、その条件下でそのまま「正しい」となることはむしろ多い。１８世紀末までに得られた微分積分のほとんどすべての結果は、１９世紀批判数学を経過しても本質的には生き残っている。

本節では、精密さはともかく、高校の微分積分の現行カリキュラムに載っている、基本概念、基本的な定理、基本的な公式等を述べる。

2.1　連続性、微分可能性、積分可能性

現行の高校数学のテキストには「微分可能」という用語は出て来るが、「積分可能」は出て来ない。指導要領を素直に読むと、極限は「限りなく近づく」という感覚的表現で理解できる範囲のものに留めよということになりそうだ。

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ については、次のように書いてある。

$F'(x)=f(x)$ となる $F(x)$ があるとき、

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

と定義する。

同一出版社の、かつ、同じ著者グループの、数学Ⅱと数学Ⅲのテキストを通して読むと、表面的には書いていないが、上記の定義においては、「$f(x)$ が連続のとき」という限定詞をつけて読んでほしい、という意図が透けて見えなくもない。（無理して好意的に読むと！）　著者には生徒の理解力を慮りに数学を傷つけているように思える。

結論を先に言えば、上記の定義は「$f(x)$ が連続のとき」という条件を付ければ正しくなる。このことを解説することを本小節の課題としたい。

ここに掲げた３つの概念を大学では、いわゆる $\varepsilon-\delta$ 論法で説明する。前２者については「限りなく近づく」なる表現で代替すれば、高校生にも感覚的には素直に受け入れらる。ところが、積分可能性については、感覚的説明では受け入れられにくい。後述するように、定積分という概念はきわめて技術的だからである。

次のことは $\varepsilon-\delta$ 論法に依らずとも $\displaystyle\lim_{x\to a}$ という極限演算の意味さえ捉えれば理解できる。

Proposition 2.1　微分可能 $\Longrightarrow$ 連続

次は連続関数の基本的な性質であるが、証明は付けられてはいないが、現行テキストにも載っている。

Theorem 2.2 連続関数については、中間値の定理、最大値の定理が成り立つ。

これから微分の平均値の定理が得られるが、高校のテキストにも証明付きで載っている。

連続関数の定積分の概念については、n 等分区分求積法を拡張した形だが、少し前の時代の高校のテキストには、この形で載っていた。先回りして言えば、これは論理的には中途半端である。

有界閉区間 I$=[a\ ,\ b]$ を n 等分割し、

$$a = a_0 < \cdots < a_n = b \quad ; \quad a_j = a_{j-1} + \frac{b-a}{n}$$

とする。この設定下で、$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(a_j)\frac{b-a}{n}$ が $n \to +\infty$ のとき、有限確定値をもつとき、$f(x)$ は I で積分可能といい、その極限値を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ で表わす。これを $f(x)$ の I における定積分という。もし、x が I を含む区間における値としてよいならば、$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx$ を関数と考えてよい。

上述の定積分の定義は、連続関数に関する限りにおいては正当であるが、この枠を外れると困った事態に陥る。すなわち、このままでは次の定理が成り立たない。

Theorem 2.3 （微分積分学の基本定理）
区間 I で連続な関数 $f(x)$ は積分可能で、I 上の関数 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx$ は I で微分可能で、$F'(x) = f(x)$ が成り立つ。

この定理の前半部を認めれば、積分の平均値の定理（高校のテキストには載っていない）が Theorem(2.2) から得られる。定理の後半部はこれに基づく。

Theorem(2.3) の前半部を証明するためには、定積分の定義を次のように修正すればよいことが知られている。（大学初年次の微分積分のまともなテキストには載っている。）

有界閉区間 I$=[a\ ,\ b]$ に対して、分割の列

$$\Delta_n \ :\ a = a_0 < \cdots < a_n = b \quad ; \quad \Delta_n \subseteq \Delta_{n+1}$$

を考える。さらに、$\delta_n = \max\{|a_j - a_{j-1}|\}$ とおく。この分割の列は $n \to +\infty$ のとき、$\delta_n \to 0$ をみたすものとする。次に、各 $j\ ;\ 1 \leqq j \leqq n$ について、数列 $\{c_j\}$ を $a_{j-1} \leqq c_j \leqq a_j$ となるようにとる。以上の設定下で

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)(a_j - a_{j-1})$$

とおく。これは分割 Δ_n および数列 $\{c_j\}$ に依存している。

上述の条件をみたす任意の分割の列 $\{\Delta_n\}$ に対して $n \to +\infty$ のとき、$I_n(f)$ が同一の有限確定値をもつとき、$f(x)$ は I で積分可能といい、その極限値を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ で表わす。これを $f(x)$ の I における定積分という。

あえて繰り返すが、連続関数が積分可能であることを示すために、定積分の定義を変更した。こうしたことから、定積分の定義はテクニカルになり、結果的には定積分の定義は感覚から遠のいた。

Corollary 2.4 （微分積分法の基本公式）
$f(x)$ を区間 I で連続な関数とし、 $F(x)$ と $G(x)$ は I で微分可能で、$F'(x) = G'(x) = f(x)$ をみたすとすれば、次が成り立つ。

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

実際、微分積分学の基本定理から、上記に言う $F(x)$ は存在するが、かかるものは微分の平均値の定理から定数の差を無視して一意的である。

強調しておくが、微分積分法の基本公式は $f(x)$ が連続でなければ必ずしも成り立たない。高校微分積分の範囲で出てくる関数はすべて（本質的には）連続関数である。この小節の初めに記したように、定積分についていささか不自然な設定も、結果的には正当化される。

高校生にとって微分積分法の基本公式のインパクトはきわめて強いものであるようだ。そのために大学入学後、いくら注意しても、基本公式の根拠となる微分積分学の基本定理が常に成り立つとの誤解から解放されないでいる。

中間値の定理と最大値の定理は、証明は難しく高校のテキストには載せられない。しかし、その内容は素朴で感覚的にも受け入れられやすい。それゆえに現行の高校のテキストにも生き残っている。

2.2 微分積分法の基本的な公式

本小節で考える関数について、それが連続とか微分可能とかである条件はイチイチ明示しない。文脈

上明らかであろうから。

1. $\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x)$
2. $\big(f(x)\cdot g(x)\big)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. $\big(\dfrac{1}{f(x)}\big)'=-\dfrac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^2}\qquad\big(f(x)\neq 0\big)$
4. $\big(f(g(x))\big)'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$

微分法の公式から積分法の公式も得られるが、特に重要なのは、微分法の２に対応する部分積分と４に対応する置換積分である。それも掲げておこう。

$$5\ \int_a^b f'(x)g(x)dx=\big[f(x)g(x)\big]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$6\ \int_a^b f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

1,2,3,4 により、多項式関数はすべて微分可能であること、微分可能な関数の有理関数（分母も分子も微分可能な関数）は分母の関数 $g(x)$ が $g(x)\neq 0$ となる点 x で微分可能であることがわかる。

3.　三角関数の微分

～その前提となる初等幾何学的直観～

中学・高校数学のカリキュラムに含まれている初等幾何学的内容は、初等幾何学それ自体を目的とするものを除けば、まず微分積分および複素解析の基礎部分に多く現われる。実は、初等幾何学を厳密に確立しようとすれば、実数論を前提にして、ある程度、微分積分を展開してから述べるのがより数学的である。この叙述順序は数学史的発展順序に反している。

第１節で述べたように、高校まででの数学では、三角関数は三角比を単純に拡張したものである。$\sin(x)$ における x はユークリッド幾何的な意味での角である。[3] で述べたように、ユークリッド幾何の枠組みでは、角と長さとは本質的に異なる量である。

ところで、複素数の世界 [1] では、指数関数、三角関数を複素関数として純粋に解析的に（巾級数で）定義した。特に、$\sin(z)$、$\cos(z)$ については

1. $\cos(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}z^{2n}$
2. $\sin(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}$

と定義した。$\sin(z)$、$\cos(z)$ は整関数、すなわち、任意の複素数 z において正則で、

$$\big(\sin(z)\big)'=\cos(z)\ \ ;\ \ \big(\cos(z)\big)'=-\sin(z)$$

が成り立つ。この場合の z を実数に制限すると、ユークリッド幾何的枠組みでは 実数は長さである。[1] で述べた証明は、三角比の延長としての三角関数の微分の証明には通用しない。

現行の高校数学では三角関数の微分法は、数学史的な順序ではより先に得られた下記の二つの事実からすべて得られる。この二つはユークリッド幾何の枠組みで示される事実に基づいている。

第一に、$\sin(x)$ に関する加法定理

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$$

第二に、x をラディアン角とするとき、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

空間としては（３次元以下の）ユークリッド空間しか想定していなかった場合。すなわち、ユークリッド空間が真理の根源と信じるならば、三角関数の諸性質は、ユークリッド幾何的枠組みから引き出してもよかっただろう。周知のように１９世紀に入ると、ユークリッド幾何の絶対真理性が疑われるようになった。１９世紀の半ばになると、三角関数を用いて非ユークリッド空間が構成されるようにもなった。こうして三角関数とユークリッド幾何の枠組みの論理関係を逆転させることが数学全体の課題となった。ユークリッド幾何以外の幾何学の可能性を知らないふつうの高校生にとっては、上述の二つの事実の証明法はむしろ受け入れやすいものかもしれない。

より細かく見てみよう。

たとえ、ユークリッド幾何の枠組みを認めたとしても、加法定理の証明において問題となるのは、長さとして現われる $\sin(x)$ とか $\cos(x)$ の正負である。これを精緻に見ようとすると、x とか y が第何象限に属するか、しかもそのとき、$x+y$ が第何象限に属するかが問題とならざるを得ない。その分類作業は可能であろうが、煩雑極まりなくなる。これに対して、先述の巾級数による加法定理の証明では純粋に解析的であって、ユークリッド幾何的枠組みに依拠していない。証明の重心を巾級数に移すことによって論理は透明かつ簡明になる。

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ については、ラディアン角の概念は、通常のユークリッド幾何の枠組みだけでは捉えが

たい「曲線の長さ」および「扇形の面積」の計量に基づいている。これらは三角関数の積分を経由せざるを得ない。三角関数の微分積分の根底となる事実を証明しようとしているであるから、結局、循環論法に陥っている。

ユークリッド幾何的枠組みによる証明は、その不備さを感じる場面に至らない人にとっては有用であり望ましくもある。このようなところで手間取っていると、豊かな応用のある微分積分まで達しない恐れがあるからである。しかし、その不備さゆえに数学への信頼感が揺らぎかねない人、あるいは、古典的な微分積分の先まで進もうと思う人には、純解析的な証明を提示するべきであろう。

4. 逆関数定理とその応用

A と B とをともに、実数全体の部分集合とする。関数 $f : A \to B$ が全単射ならば、関数 $g : B \to A$ があって、合成関数 $f \circ g$ および $g \circ f$ がともに恒等写像となるものがある。このとき f は g の g は f の逆写像という。

次の定理は合成関数の微分から容易に得られる。

Theorem 4.1 （逆関数定理）
関数 $y = f(x)$ は逆関数 $x = g(y)$ を持ち、かつ微分可能であるとする。このとき、g もそうで

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

微分積分学の基本定理を適用すると、逆関数は必ず積分で表わされる。

本節では、指数関数と対数関数の微分、逆三角関数の微分に応用する。

4.1 指数関数と対数関数の微積分

$a > 1$ とする。指数関数は、周知のように、指数法則の拡張を通して、指数の範囲を順次広げ、任意の実数 x に対して、a^x が得られた。これは実数全体を定義域とする実関数と見ることができる。

さて、こうして得られる関数 a^x は狭義単調増加かつ微分可能である。特に逆関数をもつ。それを $\log_a(x)$ で表わす。関数 e^a のグラフを考えれば、$x = 0$ における微分係数が 1 となるものがある。そのときの a を自然対数の底といい、e で表わす。この証明は自然数系から実数体を構成する手続きを確認するには適していると思われるが、いささか煩雑である。

その煩雑さを避けるために、「連続関数は定積分可能」なる定理（第２節）を用いて、先に対数関数を、$x > 0$ に対して、$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{x} dx$ として定義する。微分積分学の基本定理により、これも逆関数を持つ。それを $\mathrm{Exp}(x)$ で表わそう。簡単な計算から、$\lim_{x \to \infty} \log(x) = \infty$; $\lim_{x \to +0} \log(x) = -\infty$ がわかる。よって、$\log(e) = 1$ となる $e > 1$ が一意的に定まる。ここで $\exp(z)$ を第３節で述べたものする。さて、置換積分を施せば、定義から

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

逆関数関係から、$\mathrm{Exp}(x + y) = \mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(y)$ を得る。以上の準備の下に次が容易に得られる。

Proposition 4.2

1. 任意の有理数 q について、$\mathrm{Exp}(q) = e^q$
2. 任意の実数 x について、$\mathrm{Exp}(x) = \exp(x) = e^x$

このようにして、巾級数で定義した指数関数、三角関数の定義域を実数に制限したものが古典的方法で導入された指数関数、三角関数となることはわかる。しかも、実数 θ について、Euler の公式

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

が成り立つ。従って、三角関数の加法定理は指数関数の指数法則の別表現である。実関数と見る限りにおいて、三角関数は指数関数とまったく異なる範疇に属するように見える。しかし、水面下の巾級数と複素数を通じて三角関数と指数関数は同種の関数になる。

三角関数が初等幾何と絡むのは、$\sin(x)$ も $\cos(x)$ も周期関数でその最短周期が円周率 π の 2 倍であることに尽きる。その証明はそれらの関数のマクローリン展開に対して、増加減少を初歩的な微分法により解析すれば容易に達せられる。このようにして、ユークリッド平面幾何は巾級数で定義した三角関数の支配下に入り、その意味で複素平面の幾何学となり、複素平面内のある種の問題は複素数体の部分体の代数的な性質に変換される。この事情については [2] を見られたい。

4.2　逆三角関数の微積分

本小節で述べる逆三角関数は、三角関数の逆関数である。三角関数で頻出するのは、$\sin(x)$、$\cos(x)$、$\tan(x)$ の３つだけだが、逆三角関数は、もとの三角関数ごとに定義されるから、逆三角関数もそれぞれに応じてあり、それらを順に $\sin^{-1}(x)$、$\cos^{-1}(x)$、$\tan^{-1}(x)$ と表わす。

三角関数は全面的な逆関数を持たないが、定義域を適当に制限すると、いわゆる単射になるから、逆関数を持ちえる。たとえば、$\sin(x)$ は $[-\pi/2, \pi/2]$ で狭義単調増加で値域は $[-1, 1]$ であるから、定義域が $[-1, 1]$、値域が $[-\pi/2, \pi/2]$ の逆関数を持つ。あまりよい記号ではないが、これを $\sin^{-1}(x)$ で表わす。同様にして、定義域を適当に取ることにより、$\cos(x)$ も逆関数 $\cos^{-1}(x)$ を持つ。$\tan(x)$ の場合は、$(-\pi/2, \pi/2)$ で狭義単調増加で値域は $(-\infty, \infty)$ であるから、定義域が実数全体、値域が $(-\pi/2, \pi/2)$ の逆関数 $\tan^{-1}(x)$ を持つ。以上からわかるように、$\sin^{-1}(x)$、$\cos^{-1}(x)$、$\tan^{-1}(x)$ の定義域は原則的には、すべて異なる。

逆関数定理により、逆三角関数は微分可能関数であり、導関数は下記の式で与えられる。

Theorem 4.3

1. $\left(\sin^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad : (-1 < x < 1)$

2. $\left(\cos^{-1}(x)\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad : (-1 < x < 1)$

3. $\left(\tan^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$

4. $\sin^{-1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

5. $\tan^{-1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{x^2+1}dx$

上記の 4. と 5. はそれぞれ 1. と 3. の微分積分学の基本定理による書き換えである。

多項式関数、三角関数、逆三角関数、指数関数、対数関数、巾関数（x^a の形の関数）、およびこれらの関数の合成や四則演算によって表わされる関数を初等関数という。

$$\int \frac{\sin(x)}{x}dx \quad ; \quad \int e^{x^2}dx \quad ; \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$$

は、初等関数の積分であるが、初等関数では表わせないことが知られている。すなわち、定積分で関数を作るという操作は、初等関数のクラスで閉じていない。（逆に、初等関数のクラスは、導関数を求めるという操作で閉じている。）

そこで、どのような初等関数であれば、その積分関数も初等関数であるか、という問題が浮上する。この問題に対しては完全解答を与えることはできないから、実用的価値があるいくつかの十分条件を述べておこう。

まず、有理関数 $f(x)$ の積分は、初等関数で表わせ、和で表わしたときの各因子は、変数の一次変換を無視すれば、対数関数 $\log(x)$、有理関数、それと（実数体上）既約な２次式を分母とする有理関数（$\tan^{-1}(x)$ はその一例）となる。

その手順を少し追ってみよう。$f(x)$ を部分分数に分解すれば、多項式関数の積分、および下記の３種の積分に帰着する。

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x-1}dx \ (= \log|x-1|)$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^n}dx (= \frac{1}{(1-n)(x-1)^{n-1}}) \ ; (n \geq 2)$
3. $\displaystyle\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m}dx \ ; (p^2-4q<0)$

なお、最後のタイプの積分を I_m と表わせば、さらに部分積分を繰り返すと、有理関数と I_1 の和に表わされる。I_1 は $\tan^{-1}(x)$ のタイプに他ならない。結局、有理関数の積分は初等関数になる。

さて、$t = \tan(x/2)$ とおけば $\sin(x) = \dfrac{t}{1+t^2}$、$\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$、さらに、$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ だから、２変数の多項式関数 $f(x_1, x_2)$ について、$f(\sin(x), \cos(x))$ は t に関する有理関数となる。よって、この関数の積分関数は初等関数である。

$x = \sin(y)$ と置換すれば、$\sqrt{1-x^2}$ は $\pm\cos(y)$ に変換され、$\dfrac{dx}{dy} = \cos(y)$ だから、有理関数 $f(z)$ に対して、$f(\sqrt{1-x^2})$ の定積分関数も前例同様、初等関数になる。

5.　高校微分積分の課題

著者は教員養成学部に在職しているが、これまでは高校の微分積分の内容は断片的に眺めるだけであった。すでに書いてきたことを繰り返すことになるが、眺め直して、著者の心にわだかまりとなって残っていることを記す。

最大の問題は、定積分の定義、および、それに連動しての微分積分学の基本定理の扱いである。

「定積分の定義」 $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とするとき、$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

このように定義すると「どんな関数でも原始関数をもつ」といった先入観を植えつけることにはならないか。テキストには「微分可能関数」や「連続関数」の述語も登場させている。高校生向けのテキストだから、それらに完璧な精密さを期待などしていない。高校生の年齢では、後で改変可能な範囲であれば、論理の厳密さよりもたしかな直観養成を眼目とすべきである。しかし、大学に入学してきた学生を見ていると「どんな関数でも原始関数をもつ」といった先入観は容易に拭い去れない。

これに対する具体的な提案は二通りある。

1. 連続関数しか扱わないとしっかり言明すること。
2. 積分可能関数なる術語を前面に出し、積分可能なだけでは、微分積分の基本定理の内容は成り立たないことこ言明すること。(この場合でも「微分積分学の基本定理」を証明せよと要求しているのではない。)

本稿叙述にあたり強調したのは、微分積分学の基本定理と逆関数定理を結びつけることだった。高校数学に取り込むべきだとは思っていないが、こうすれば逆三角関数も理解されやすくなると信じている。

微分積分の最大の強みは、きわめて強力な計算システムを持っていることである。そのために代数などでは想像すらできないような、構成的存在証明が可能になる。前節で述べた初等関数の原始積分が初等関数か、という問題は、意図が、もし、初等関数に留まってほしいというならば、つまらない問題だろう。むしろ、積分するという操作によって、既知の関数から未知の関数を作るという方向こそ魅力なのではなかろうか。無限和、無限積、微分方程式、積分方程式といったものが、解析の重要な話題になりえる所以は、まさしくそこにある。

最後の段落で述べたことは、もちろん高校数学の枠外である。

参考文献

[1] 佐藤英雄, 複素数の世界 (1), 教育実践総合センター紀要 (2004),147-152.

[2] 佐藤英雄, 複素数の世界 (2), 和歌山大学教育学部紀要 (2006),51-57.

[3] 佐藤英雄, 中等数学のカリキュラムへの視点 (1), 和歌山大学教育学部紀要 (2008),67-73.