和歌山大学教育学部教育実践研究指導センター紀要　No.4　1994

教員志望学生の算数における乗法の意味の拡張の捉え方について

On Some Ideas of Prospective Elementary Teachers about the Extension of Meaning of Multiplication in Arithmetic

今　井　敏　博（数学教室）
Toshihiro IMAI

小学校教員志望学生の，乗法の意味の拡張特に乗数が整数から有理数になることについての算数としての意味づけに関する調査を行い，その結果を分析した。

乗数が小数の場合も累加の考えがあてはまると反応した被験者が3割近くもあり，予想を上回った。しかし，それらの被験者は，割合としての考えをもち備えており，累加の形で拡張できないかの模索の中での葛藤の状態にあると思われる。

キーワード：　算数，乗法，教員志望学生

1．はじめに

小学校の算数の教材としての乗法は，現在では日常場面での事象により同数累加の簡潔化として導入されている。例えば「みかんが5つのっているおぼんが3つある。みかんは全部でいくつですか。」という事象の設定において，5＋5＋5という累加の考えを，同じものが3つあるから，みかんが5つのっているおぼんが3つあるとみなして，5×3とかくように導入する。しかし，高学年になると，乗数が小数や分数となるような有理数をかけることについての意味づけが必要になる。この乗法の意味の拡張をどのように行うかは，小学校での算数指導の中で重要な課題であり，小学校教師を目指す教員志望学生が，算数教育に関する教員養成課程での授業の中で獲得していく必要のある知識であると思われる。

そこで本稿では，教員志望学生が，乗法の意味とその指導について算数教材研究の授業で学習する前にそれをどのように認識しているかを，調査をもとに明らかにし，大学での算数教材や算数教育の授業でどのような点を特に留意して学ぶ必要があるかについて検討してみたい。

2．乗法の意味の扱いについて

小学校で扱う乗法の意味については，次のような内容が考えられる。

a）同数累加の簡潔化

5＋5＋5という累加を5×3と表すこと　b）単位あたりのいくつ分

「1皿あたり5個のりんご3皿分ではいくつでしょう。」という事象を5（個／皿）×3（皿）と表す。

c）長方形的配列（アレイ）

よこに5つある集まりが3つたてに並んでいるとみて，5×3とかき，たてに3つある集まりがよこに5つ並んでいるとみて，3×5とかく。

d）あるものの何倍分

5㎝の竹が3倍に成長したという事象を5（㎝）×3と表す。

e）たて5㎝，よこ3㎝の長方形の面積を5（㎝）×3（㎝）と表す。

算数では，a）同数累加の簡潔化やb）単位あたりのいくつ分の事象を低学年で扱い，それの応用として，c）長方形的配列（直積型）を用い，d）において乗数が有理数の場合をも扱う。長方形の面積の公式は，c）の特殊な事象として見いだすことができる。しかし長方形の求積公式は，「量と測定」の内容であり，「数と計算」の内容とは区別して扱う。

1960年代の数学教育の現代化の頃に，乗法の意味の扱いについて，数学的に展開するか，日常事象から子どもの認識を基に展開するかについて，アメリカの算数教育誌上で議論がなされている。

ベヒテルとディクソンは，数学では，加法と乗法を異なった操作として記述し，2つの操作が分配法則で結びつけられていることにより，乗数が分数であっても累加に表示することができるとしている。[1]

$$a(b+c) = a\times b + a\times c$$

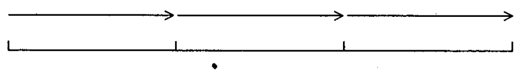
$$3\times 2 = 3\times(1+1) = 3\times 1 + 3\times 1 = 3+3$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{15}+\frac{2}{15}+\frac{2}{15}$$

これに対して，ラパッポルトは，子どもの日常的経験を教育的に考える上で，乗法を累加として展開することの重要性を次のように主張している。[2][3]

乗法は，加法では複雑な計算を簡単に行う方法として作り出されたものであるため，7＋7＋7＋7を7×4として表示することに意義を与えている。数直線上のベクトル表示や長方形配列（アレイ）の，よこのまとまりがたてにいくつ，たてのまとまりがよこにいくつという場合も，集合の直積の考えで捉える場合は，いずれも累加の考えを基本としている。また乗数が分数の場合も累加としての表示が可能となる。

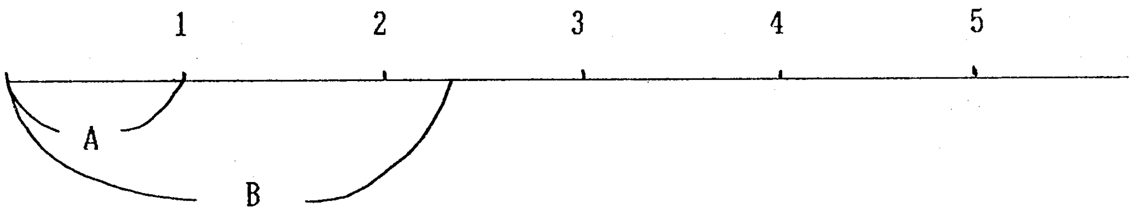


$$\frac{3}{4}\times 8=3\left(\frac{1}{4}\times 8\right)=3\times 2=2+2+2$$
$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=3\left(\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{24}+\frac{5}{24}+\frac{5}{24}$$

現代化当時，文部省でわが国の学習指導要領の作成のまとめを行っていた中島は，わが国の教科書の扱いについて，乗法を加法の特別な場合を簡潔に表すという立場から意味づけることは，低学年の場合は教育的にも意味があり，この立場をとっている。[4)5)] しかし累加の考えの問題点は，乗数が有理数の場合に起こる。そこでわが国では，累加という考えをそのまま用いないで，次のような意味に一般化する方法がとられた。

Ａを基準（単位）とする大きさとし，ＢをＡを単位とした測定数とするとき，
Ａ×ＢはＢの目盛りに対応する大きさを読み取ることにあたる。

Ａ　・・・基準（単位）とする大きさ
Ｂ　・・・Ａを単位とした測定数



これは，割合ともいわれているが，Ａ×ＢはＡという単位量のスカラー倍を表すという考えである。この場合，乗数が整数の場合に累加の考えを特別な場合として含んでおり，整数，小数，分数に関係なく一貫して用いられ，また小数，分数の乗法が適用される場合をこの意味に基づいて一般的に理解させ，乗法の適用判断を統一的に能率よく行うことができる。このような考えに基づいた扱いが現在においても継続されており，数学的な考えの育成という観点からも指導法が検討されている。

３．調査のねらい

次のような３つの点に主眼をおいて，調査結果をもとに検討する。
・乗法の拡張の必要性について，どの程度意識しているか。
・（拡張された）乗法の意味を具体的にどんな内容としてつかんでいるか。
・被乗数と乗数とを区別して意味づけを行っていることが乗法の意味をさらに抽象していく上でどのような影響を及ぼしているか。

４．調査の実施

和歌山大学教育学部の1993年度の算数教材研究法の履修生102名，滋賀大学教育学部の1993年度後期の算数教材研究の履修生37名を調査対象とした。いずれも乗法の意味の内容を授業で扱う前に調査を行った。

なお調査項目は，中島（1968）の研究で使用されたものほぼ同様な形で構成した。

5．調査の結果と考察

1）乗法の概念とその拡張の必要性について

問1の質問項目は次のようである。
「2年か3年では，『「かけ算」は「同じ大きさのもの」が「いくつかある」とき，その「全体の大きさ」を求める計算である』というように学習しています。この考えでは，例えば，7×4というかけ算は，「7が4こ集まった大きさ」を表しており，たし算では，7＋7＋7＋7とかくことができます。
そこで，次に，7×2.4という，かける数が小数になっているかけ算を考える。このときは，上に述べた考えのままであてはまるでしょうか。これについて，次の□の中に○をかいてください。
□ア，上の考えのままであてはまる
□イ，上の考えのままであてはまらない
□ウ，どちらともいえない
結果は表1のようであった。」

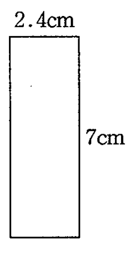
表1　問1に関する結果　　(139人中)

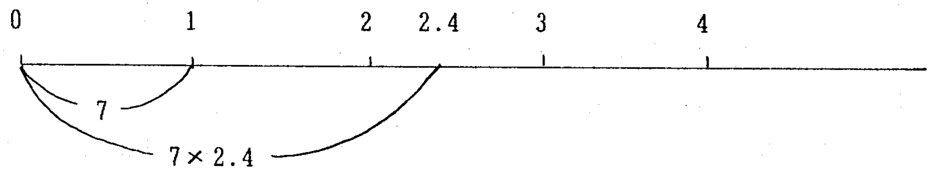
ア．そのままあてはまる	39人	(28.1%)
イ．そのままであてはまらない	79人	(56.8%)
ウ．どちらともいえない	21人	(15.1%)

約30%近くの被験者が，7×2.4をも累加の考えがあてはまると考え，乗数を整数から小数へ拡げるにあたって，累加の意味に不都合が起こることは意識していないと思われる。

2）乗法の一般的な意味について

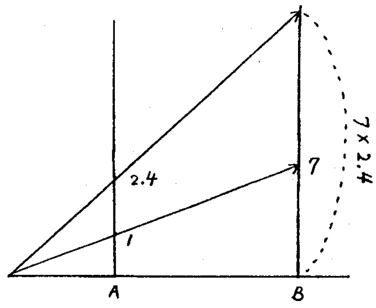
問2の質問内容は次のようである。
「7×2.4のように，かける数が小数のかけざんは，どんな考えを表しているといえますか。あてはまると思うものについて○をつけてください。またその中で最もよいと思うものに◎をつけてください。
□ア，7を2.4回加えるという考え
□イ，たとえば，たて7cm，よこ2.4cmの長方形の面積を表すという考え
□ウ，（もとにする大きさ）×（割合）の式で，「もとにする大きさ」が7，「割合」が2.4という考え
□エ，たとえば，下の図のように，7の大きさを1目もり(単位)にして数直線をかいたとき，2.4の目もりのところになる大きさを表すという考え





□オ，たとえば，次の図のように，Ａのくじで１の長さがＢのくじで７に広がるようなしかけがあるとき，Ａの2.4がＢでどれだけになるかを表すという考え

□カ，７×2.4は，７×１の大きさを１とみたとき，2.4にあたる大きさを表すという考え



結果は表２のようであった。」

表２　問２に関する結果　(139人中)

	一つだけに◎	いくつでも○
ア．（2.4回）	6人（ 4.3%）	32人（23.0%）
イ．（たて×よこ）	40人（28.8%）	88人（63.3%）
ウ．（基準×割合）	28人（20.1%）	84人（60.4%）
エ．（測定の考え）	44人（31.7%）	84人（60.4%）
オ．（拡大）	4人（ 2.9%）	54人（38.8%）
カ．（１と2.4の割合）	17人（12.2%）	92人（66.2%）

問１で30%近くの被験者が７×2.4を累加と考えているにもかかわらず，問２で１つだけを選ぶ場合にアに◎をつけた被験者は4.3%と大変少なかった。しかし，いくつでも○をつける場合においては，23%であり，乗法の意味の拡張の認識についての曖昧さを伺うことができる。

問１でアと反応した被験者をＡグループとし，イと反応した被験者をＢグループとしたとき，ＡグループとＢグループの被験者が問２でどのように反応したかを示した結果が表３である。

表３　Ａ、Ｂグループの問２の結果（一つだけに◎）

	Ａグループ（39人中）	Ｂグループ（79人中）
ア．（2.4回）	3人（ 7.7%）	2人（ 2.5%）
イ．（たて×よこ）	13人（33.3%）	17人（21.5%）
ウ．（基準×割合）	13人（33.3%）	9人（11.4%）
エ．（測定の考え）	8人（20.5%）	34人（43.0%）
オ．（拡大）	1人（ 2.6%）	0人（ 0.0%）
カ．（１と2.4の割合）	1人（ 2.6%）	17人（21.5%）

Ａグループで問２でアと答えた被験者の数は少なく，問１の質問では，乗数が小数の場合にも累加の考えがあてはまると考えているにもかかわらず，問２の質問でいくつかの中から選択する場合においては，７×2.4を2.4回加えるという考えがあてはまると考えていないということになり，累加としての乗法の意味の拡張についての認識が不安定であることを表している。

Ａグループとｂグループの比較では，Ａグループでウと反応した被験者の割合がＢグループよりも高いことから，小数をかけることを累加で表せると考えながらも割合としての説明に対しては同意する傾向にあると思われる。Ｂグループはエと反応した被験者の割合が比較的高く，数直線上での割合の表示の適切性についての認識も高いと思われる。

Ａ，Ｂグループごとの問２にいくつでも○をつける場合の反応の結果は，表４の通りである。

表４　Ａ、Ｂグループの問２の結果（いくつでも○）

	Ａグループ（39人中）	Ｂグループ（79人中）
ア．（2.4回）	17人（43.6%）	12人（15.2%）
イ．（たて×よこ）	34人（87.2%）	56人（70.9%）
ウ．（基準×割合）	24人（61.5%）	55人（69.6%）
エ．（測定の考え）	27人（69.2%）	63人（79.7%）
オ．（拡大）	17人（43.6%）	29人（36.7%）
カ．（１と2.4の割合）	21人（53.8%）	64人（81.0%）

Ａグループの被験者でアと答えた者の割合がＢグループのそれよりも高く，いくつでも○をつける場合では，問１でアと答えるに至った考えが問２の選択にも表れている。他の項目については，カの１と2.4の割合としての捉え方では，Ｂグループの被験者は，Ａグループの被験者よりも反応が高く，割合のこのような捉え方でのＢグループの被験者の認識の高さを伺うことができる。

３）割合ということの意味の理解

問３の質問項目は次のようである。

「７×2.4は，問２のウの考えでは，2.4を「割合」だといっています。しかし，問２のア，イ，エ，オ，カの中でも，その考えになっているものがあったら，そのすべてに○をかいてください。

□ア，　□イ，　□エ，　□オ，　□カ　」

問３に対する反応結果は表５の通りである。

表５　問３に関する結果（139人中）

ア．（2.4回）	11人（ 7.9%）
イ．（たて×よこ）	8人（ 5.8%）
エ．（測定の考え）	115人（82.7%）
オ．（拡大）	89人（64.4%）
カ．（１と2.4の割合）	120人（86.3%）

エ，カが非常に高く，オも高い値であり，割合の意味の理解とその表示方法についての認識は高いと思われる。

次に問２でアを選んだ被験者（○印をつけたもの）の内訳は表６のようである。

表６　問２でア（2.4回）を選んだ被験者について

	2.4回を割合の中に入れた被験者	2.4回を割合の中に入れなかった被験者	計
Ａグループ	4人	14人	18人
Ｂグループ	3人	11人	14人
計	7人	25人	

７×2.4を７を2.4回加えることを意味するとした被験者の中にも，約８割の者が,「2.4回」を割合とみなしていないことを示している。すなわち，問２でアに反応し７×2.4の意味を2.4回加えるという捉え方をした被験者の中で，問３でアに○をしていない被験者が多かったので，問２アにおいては，7×2.4を2.4回加えると捉えたが，2.4をかけることを割合として解釈できることを知った後には，2.4をかけることは2.4回加えるという捉え方をしなくなったと思われる。

問２でウ（基準×割合）を選んだ被験者（いくつでも○をつける）についての問３に対する反応の結果が表７である。

表７　問２でウを選んだ被験者(84人)の問３のエ、オ、カへの反応

エ、オ、カの３つとも○をつけた被験者	48人	(57.1%)
エ、オ、カのうち２つに○をつけた被験者	32人	(38.1%)
エ、オ、カのうち１つに○をつけた被験者	4人	(4.8%)
エ、オ、カのどれにも○をつけなかった被験者	0人	(0.0%)

問２において，ウすなわち７×2.4を割合として捉えた被験者のうち大半の被験者が，エ，オ，カのうち２つ以上に○をつけていることから，これらの被験者は，ほぼ割合の意味について理解していると思われる。

以上のことから，７×2.4の2.4をかけることを割合と捉えた被験者は，その割合の意味，割合の表現方法についての認識はなされていると思われ，この教材の指導展開についての工夫が算数教師として十分可能であると思われる。

７＋７＋７＋７が７×４であるというような累加の捉え方を７×2.4の場合についても適用し，2.4をかけることは，2.4回加えるという累加としての意味づけをしようと考える被験者においても，割合としての捉え方を認識した後においては，割合の表現についての理解が可能であると考えられる。このような被験者は，今回の調査項目に対して累加としての捉え方で有理数をかけることも説明がつくと思いながらも，割合としての認識をもかね備えた中で,それらの関連について明らかにできないような葛藤の状態にあると思われる。

６．おわりに

本稿においては，小学校の教員志望学生の乗法の意味の拡張，特に乗数が整数から有理数になることについての算数としての意味づけに関するレデイネスについて調べた。小数

をかける場合も累加の考えがあてはまると反応した被験者が，約3割近くもあり高かった。学習後の小学生への同様の調査結果（岸本,1992）においては，約半数の者がそのような反応を示したという報告[6]があるが，大学生については，予想を上回る値であった。しかし，割合の考えや割合の表示などのいくつかの選択枝からの一つの選択としては，累加を選ぶ被験者が少なかった。また適当ものをいくつでも選ぶ形式においては，約23%が累加の考えを選んでいた。このことから，乗数が有理数になる場合についての意味づけについて，教員志望学生においては，曖昧さ，迷い，葛藤があることが想像され，それ故に質問の形式の異なる場合に違った反応を行っていると思われる。すなわち累加の考えをそのまま適用した形で乗数が有理数の場合も説明できることが望ましいと思いながらも，その意味づけの方法が見つからないという状況が，曖昧さ，迷いや葛藤を呼び起こしているのではないかと思われる。しかし，これらの被験者も割合の考えや表現方法についてはかなりしっかりした認識があるため，意味づけとその表現方法に関して，累加の考えから割合の考えへのリンキングがしっかりなされれば，この教材についての良い認識がなされ，指導方法や授業構成などの応用が可能になると考える。

引用・参考文献

1）Bechtel,R.D.& Dixon,L.J.; Multiplication-repeated addition?, The Arithmetic Teacher, May 1967, pp.373-376.
2）Rappaport,D.; Multiplication is repeated addition, The Arithmetic Teacher, November 1965, pp.550-551.
3）Rappaport,D.; Multiplication-logical or pedagogical?,The Arithmetic Teacher, February 1968, pp.158-160.
4）中島健三；乗法の意味の指導について，日本数学教育学会誌　算数教育，Vol.50, No.2, 1968, pp.2-6.
5）中島健三；乗法の意味ついての論争と問題点についての考察，日本数学教育学会誌　算数教育，Vol.50, No.6, 1968, pp.2－5.
6）岸本忠之；児童の原理・法則の理解について一小数の乗法を通して一，第25回数学教育論文発表会論文集，1992，pp.1－6.