中学校数学における数式単元の考察

On some investigation of Math in algebraic fields of Junior high school

片山　聡一郎
Soichiro KATAYAMA
（和歌山大学教育学部）

森杉　馨
Kaoru MORISUGI
（和歌山大学教育学部）

2011 年 8 月 11 日受理

論文 [1] [2] では 中高の数学, とりわけ中学校の数学では, その数学内容を教える際に生徒に受け入れられ易いよう様々な教育的工夫がされていること, 中学校高校の教材のどの部分が教育的配慮の工夫であるかを明らかにし, それを取り除いて見える教材の中の数学的構造を明らかにすること, および, その数学的構造が持っている問題点を指摘して, 純粋の数学的立場からの説明にも触れた。
この小論文では, 基本的には同じ考えに基づき, 中学校数学で最初の学習内容である正の数・負の数の授業のなかでの扱い方の一つの提案＝「碁石の利用」をするとともに, その理論的根拠と期待される効用を述べて, その根拠が教科書の記述といかに整合しているかを説明する。
また, 等式の性質, 代入法と加減法, 平方根と因数分解, 整数係数２次式の因数分解などに付いてもコメントする。

キーワード: 正・負の数, ２数の和, 等式の性質, 因数分解, 平方根

1. 正・負の数の和, 碁石のすすめ

中学校に入学して最初に学ぶ数学は正の数・負の数の単元である。たいていの教科書のこの単元の扱いは,

1) 負の数の導入
2) 数直線と絶対値
3) 正の数・負の数の大小
4) 正の数・負の数の加法と減法
5) 正の数・負の数の積, 商

の順に指導がなされている。その内容は, 基本的には自然数から整数への拡張であるが, ある程度整数について習熟が期待される段階になると, 分数や小数でも同じであるとして, 一般の数（今の場合は厳密には有理数）にも適用される。

以下の文章では, 数というときには整数を考えている。

1.1 ２数の和

4) では, 正の数・負の数の 2 つの数の加法および減法が説明されている。特に, 生徒が振り返って参照すると思われる, ２数の和については,

- 同符号の場合にはその絶対値の和を考えてそれにその符号をつける
- 異符号の場合には絶対値の差 (大きい方から小さい方をひく) を考えてそれに大きい絶対値を持つ数の符号をつける

とまとめられており, 今後の和および差に関してこれに即した計算を習得する様に配慮されている。また, この２つの数の加法の習熟および概念理解を目的として, トランプを使った計算 (例えば, スペード, クローバのカードに書かれた数字を正の点数, ハートとダイヤのカードに書かれた数字を負の点数と見なして, 2 枚のカードの点数の和を, 式に書いてそれを計算する) が載っていることが多い。

ここでは, トランプの代わりに碁石を使った, 2 つの数の和の実践練習を提案したい。

具体的には, 白黒の碁石をたくさん用意する。白の碁石の数を正の数, 黒の碁石の数を負の数と見なして, トランプの計算と同じことをする。

何が異なるかと言えば, まず, トランプの場合にはカードが４種類であるが, 碁石の場合には白と黒の２種類のみで, 正・負との対応が明確である。

次に, 碁石を使った計算は, トランプの場合と異なり式に直さなくても, 数え上げだけの操作として計算できる。このことが最大の魅力である。

つまり, 白同士, 黒同士の和の場合には, その合計の個数を数えればいいし, 白と黒の和の場合には, 同数の白黒の碁石をキャンセルして残ったものを数え上げるだけである。キャンセルも一度にいっぺんにやらなくても数回に分けてキャンセルしてもよいので, ２つの数の和が操作として実感できる。また, 式に表したものと操作による計算を照らしあわせることにより, 上に述べられた２つの数の加法のまとめの意味・まとめの文章に即した計算の習熟が期待できる。

さらに, 減法の場合も, 減じる方の石の色を入れ替えた加法と同じであることも下のように説明できるし, 計算の習熟にも利用できる。

$$(1)\ \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc-\bigcirc\bigcirc=\boxed{\begin{array}{l}\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\\ \boxed{\bigcirc\bigcirc}\\ \bullet\bullet\end{array}}-\boxed{\bigcirc\bigcirc}$$

$$=\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc+\bullet\bullet$$

$$(2)\ \bullet\bullet-\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc=\boxed{\begin{array}{l}\bullet\bullet\\ \boxed{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}\\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\end{array}}-\boxed{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}$$

$$=\bullet\bullet+\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

以下, 碁石を想定して, 正の数・負の数の数学的構成と照らしあわせて見よう。

普通, 大学での整数 $\mathbb{Z}$ の構成は, 自然数 $\mathbb{N}$ を使って, 積集合 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ の中のある同値関係による剰余集合として定義されるが, ここでは, 小学校で習ったことからの拡張を意識して, 次のようにする。

小学校では, 自然数だけではなく, １年生から零もすでに習っているので, $\mathbb{N}$ からの拡張ではなく, $\mathbb{N}_0$ を自然数 $\mathbb{N}$ と零からなる集合として, $\mathbb{N}_0$ の拡張としての整数を作る。このようにしたほうが, 新しく構成した整数の中に, $\mathbb{N}_0$ と同じ構造のものがあることが容易にみとめられるし, のちに構成する, 数直線との関係でも都合がよい。

つまり,

$$\mathbb{Z}=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{N}_0\}/\sim$$

ここでの同値関係 $(a,b)\sim(c,d)$ は

$\mathbb{N}_0$ の中で $a+d=b+c$ が成立する

ことと定義している。

これは, 同値関係となり, その同値類の集合を整数と定義して, いつものようにこの中に, 和および積が定義され, さらに, 大小関係も素直に入る。これが, 中学校で出てくる整数になる。つまり,

α を (a,b) を含む同値類, β を (c,d) を含む同値類とするとき, 元 $(a+c,b+d)$ を含む同値類を $\alpha+\beta$ として, 和を定義する。また, 元 $(ac+bd,bc+ad)$ を含む同値類を $\alpha\beta$ として, 積を定義する.

$a+d\leq b+c$ のとき, $\alpha\leq\beta$ として, 大小関係が定義される

これらの演算および大小関係の定義はいずれも, 代表元の取り方によらないこと, 得られた整数は, 和積に関する交換法則, 結合法則など期待される性質をすべて満たすことも容易に示される。当然, ゼロ元は $(0,0)$ の同値類であり, 単位元は $(1,0)$ の同値類となる。

ここで, 任意の (a,b) に対して, x を a と b の大きい方から小さい方を引いて得られる値 (これは $\mathbb{N}_0$ の元となる) とするとき,

$a\geq b$ のときは, (a,b) は $(x,0)$ と同値となる,

$a\leq b$ のときは, (a,b) は $(0,x)$ と同値となる。

つまり, 任意の数 α の代表元 (a,b) として, 必ず, $a=0$ または $b=0$ の形のものがとれる事に注意する。

α が $(a,0)$ の同値類, β が $(c,0)$ の同値類の場合, 記号であらわせば, $\alpha=[(a,0)]$, $\beta=[(c,0)]$ の場合では, 上の定義によると, $\alpha+\beta=[(a+c,0)]$, $\alpha\beta=[(ac,0)]$ $\alpha\leq\beta\Leftrightarrow a\leq c$ が成立するので, 上の構成での第２成分が０の元で代表されるものは, 和および積で閉じていて, 大小も含めてちょうど $\mathbb{N}_0$ と同一視できる。

a を自然数とするとき, $(a,0)$ で代表される数が正の数であり, $(0,a)$ で代表されるものが負の数, $(0,0)$ が零である。

以上の構成を碁石を頭において, 中学校の学習内容とりわけ, 上のまとめ（枠囲いをした部分）と比べてみる。

まず, まとめの正負の符号は碁石の白黒の色, 正の数は白石の数, 負の数は黒石, 絶対値は色を無視した石の数に相当する。

「異符号の場合には絶対値の差 (大きい方から小さい方を引く) を考えてそれに大きい絶対値を持つ数の符号をつける」は, 白と黒の碁石が与えられているときは, 少ない数の方の碁石を多い方の碁石と同数でキャンセルすると, 多かった方の碁石が何個か残る, これを数えることに相当している。

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc+\bullet\bullet\bullet}_{\text{キャンセル}}=\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

1.2　幾何学的解釈と数直線

中学校では, 大小関係が数直線とともに述べられている。これに相当することを説明するには, 上に述べた整数の構成と絡めて数直線を構成・理解する必要がある。

小学校４年の段階で, すでに, 正また零の数に対応する数直線が導入されており, さらに, 正また零の数の対を座標とする, 平面座標を利用した折れ線グラフの指導などがなされている。

そこで, 我々の構成を幾何学的に小学校で学んでいる平面座標を通して見直すと, 1.1 で整数を構成する際に使った $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ はこの座標系の中での格子点全体と考えられ, $(a,b) \sim (c,d)$ は, 点 (c,d) が, 点 (a,b) を通る傾き１の直線 (これを方程式で表すと $y+a=x+b$ となる) 上にあることを意味するので, (a,b) の同値類とは, 点 (a,b) を通る傾きが１の直線を意味することになる。

そのような直線は, 当然, この座標軸の x 軸または, y 軸 $(x, y \in \mathbb{N}_0)$ のただ一つの点で交わるので, その直線の x-切片または, y-切片で代表されることになる。この x-切片, y-切片の存在が, 前に述べた, 任意の数 α の代表元 (a,b) として, 必ず, $a=0$ または $b=0$ のものがとれるということに対応している。

ちなみに, $\alpha=[(a,b)]$, $\beta=[(c,d)]$ とするとき, 前に述べた定義の $\alpha \leq \beta$ とは, 座標平面上のことばで述べるなら, 点 (a,b) を通る傾き１の直線が点 (c,d) を通る傾き１の直線の上側にある, と言い直される。

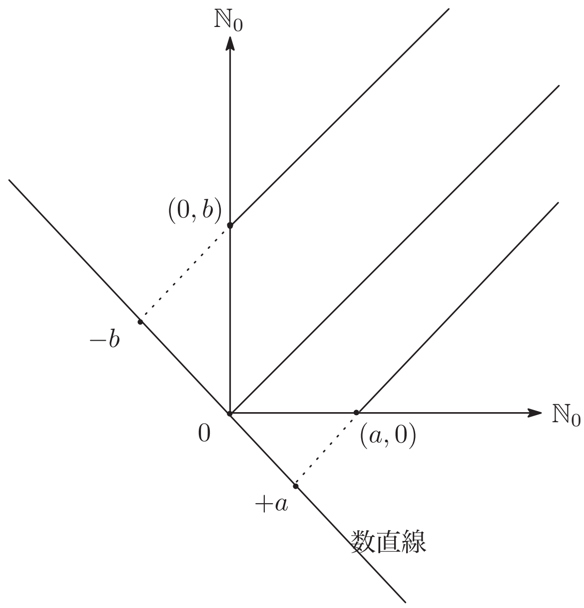
さて, 正負の数を座標とする数直線を構成しよう。

右上の段落の図のように, 傾き１の直線に直交して, 原点を通る直線を想定して, この直線上に, これまでに考えた, 傾きが１の様々な直線との交点を想定して, この交点で, 傾き１の直線を代表すると, これが数直線のモデルになる。さらに, 前に述べた大小関係の定義から, この数直線上で, 図の上で, 左上にあるほど小さく, 右下にあるほど大きくなっていることもわかる。

あとは, この数直線だけを取り出せば, 中学校で学んだ数直線が, 理論的に構成できたことになる。

以上, 自然数と零をもとにして正負を持つ整数を構成したが, 全く同様に, 正の分数と零をもとにして, 正負を持ついわゆる有理数全体も構成される。

この場合には, 碁石に相等するものとしては, 白黒の２種類のひもをもってきて, 白いひもの長さを正の数, 黒いひもの長さを負の数と考えれば碁石の場合とまったく同じ練習もできる。また, これらの理論的根拠に関しても, まったく同様である。



2．等式の性質, 代入法と加減法

中学校１年の方程式の単元の中で, 等式の性質として, 次のように述べられている。

> 等号＝を使って，２つの数量が等しい関係を表した式を等式という。
> 1) 等式の両辺に同じ数をたしても, 等式が成り立つ
> 2) 等式の両辺に同じ数をかけても, 等式が成り立つ

関連して, 中学２年の連立方程式の単元では, ２つの文字の１つを消去するのに, 代入法および加減法と呼ばれる方法があることが述べられ, 連立方程式は, これらの方法で, １つの文字の方程式に帰着できるとされている。また, この指導の際に, 代入法と加減法をどちらを先に指導すべきかという論争もある。

等式の性質は，現場ではほとんど当たり前のこととして，アプリオリに与えられる。検証自体の必要性も述べられることはない。しかし，これがなぜ成り立つかという問を発してみることも, 等式というものを深く認識するためには必要であろう。生徒にとって必要だというのではなく, 教える教師が背後におぼろげにでも認識しておくべき内容だと考える。そこで，ここでは, これらを数学的に検討してみよう。

そもそも, 等式とは何か, 厳密に答えるのは難しい。ここでは [3] に従って最小限必要なことを解説する。普

通, 等式 $a = b$ の性質としては, 次のように述べられることが多い。

等式は等号と呼ばれる記号 “=” によって, 二つの対象 a, b を結合させる二項関係として $a = b$ のように記される。この等号は次の２つの性質で特徴づけられる。

1. 自己律: 対象 a が何であっても $a = a$ は常に成り立つ。
2. 代入原理: 対象 a, b が $a = b$ であるときには, 一つの自由変数 x を含むどんな論理式 $P(x)$ についても $P(a) = P(b)$ が常に成り立つ。

上の代入原理から下の性質が導かれる。

1. 対称律: 対象 a, b について $a = b$ が成り立っているときはいつでも $b = a$ も同時に成り立つ。
2. 推移律: 対象 a, b, c に対して $a = b$ と $b = c$ が同時に成り立っているときには常に $a = c$ も同時に成り立つ。

なぜなら, $P(x)$ として, “$x = a$”の真偽を表す論理式を考えると, $a = b$ ならば, 代入原理から $P(a) = P(b)$ が成立する。$P(a)$ は自己律より真である。故に $P(b)$ も真である。言い直すと, $b = a$ が成り立つ。

推移律では, $P(x)$ として, 論理式 $x = c$ を考えればよい。

上の自己律, 対象律, 推移律の３つの性質は, 等号という記号で表される関係が同値関係であることを意味している。代入原理が, たくさんの同値関係の中で特別な関係である等式を特徴付けているとも考えられる。論理式を集合からの関数と考えたときには, これは, この関数がきちんと定まっているということを意味している。

等式の性質１）の場合では, $P(x)$ として関数 $x + c$ を考えると, 代入原理より

$$a = b \Rightarrow P(a) = P(b), \text{ つまり}, a + c = b + c$$

と考えられる。等式の性質 2) では, $P(x)$ として関数 xc を考えればよい。

つまり, 枠囲いの中のような, いわゆる「等式の性質」と呼ばれるものは, 方程式を解くときに利用される, 特別な式 $P(x)$ を想定して, 等号の性質の代入原理を適用したものである。

また,「加減法」と呼ばれるものは, 等式の性質

$a = b$ かつ $c = d \Rightarrow a + c = b + d$

を利用することであるが, これは

等式の性質１）より $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

また同様に $c = d$ より $b + c = b + d$,

よって推移律より $a + c = b + d$

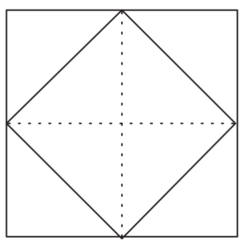
で説明される。

しかし,「代入法」は, これらと違って, 上記の等号の性質の代入原理そのものの適用である。連立方程式の文字の１文字消去の手段として, 代入法と加減法は同列に扱われるが, 根拠を整理して原理的に考えてみると上のように, 代入法の方がより根源的であり, 加減法というものは, 特別な式に代入原理を適用したものであるといえる。

ただし, そうであっても, 連立方程式の指導で代入法を加減法より先にすべきだと言う結論になるわけではない。どちらを先に指導しても理論的には何の問題もないし, どちらも指導すべき内容である。要は, 生徒にとってどちらから入る方がわかりやすいかだけであろう。

3. 平方根と因数分解

中学３年生で, 平方根が出てくる。式の計算 (乗法公式や因数分解) の単元, 平方根の単元, ２次方程式の単元の３つは相互に関係している。多くの教科書では, 式の計算, 平方根, ２次方程式の順になっているが, 一部の教科書では, 異なる順序の場合がある。

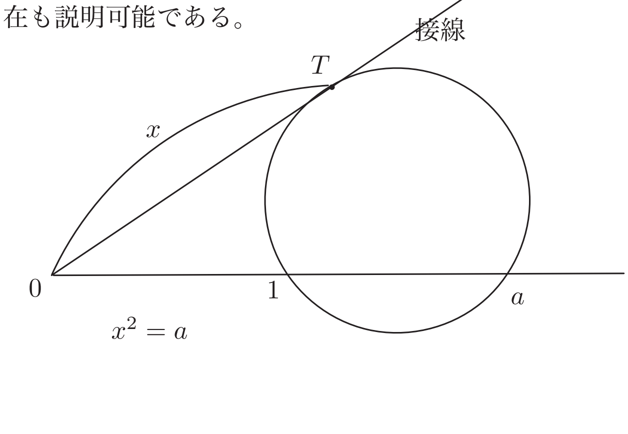


ルート２は, 右図のように, 面積が２の正方形の１辺の長さとして導入される。またこの図によって, ２乗して２になる「長さ＝数」の存在が保証されている。

この根拠は,「正方形の面積は１辺の長さの２乗である」ことにあり, 上図により, 面積２の正方形の存在がわかるので, ２乗して２になる数の存在が保証されるのである。直角三角形のピタゴラスの定理 (３平方の定理) は, 中学３年の後半に出てくる内容であり, この段階では利用できない。

一般の正の数 a に対して, 面積が a となる正方形の存在は明らかではないが, $a = 2$, $a = 5$ などの場合を同様の図で例示して, a に対して, ２乗して a となるものの存在とそのような数を取り扱う必要性を中学生に納得させていると考えられる。

高校では, 方べきの定理の１つとして, 下の図のように説明されているので, 数直線上の１と a を通る円に対する原点からその円への接線の長さとして $\sqrt{a}$ の存在も説明可能である。



なお, ユークリッド幾何学と長さや面積に関しては, ここで述べたほど素朴なものではなく, 厳密には, 実数論や測度論など関連したかなり難しい内容を含んでいる。筆者らは, これらを明快に説明したものを見つけることができなかった。

中学校の話に戻る。一般に, 正の数 a の平方根（$x^2 = a$ の解が定義である）は, 正の数と負の数の２つあって, 正の方は $\sqrt{a}$, 負の方は $-\sqrt{a}$ のように表すとされている。

しかし, この段階では, $\sqrt{a}$ の存在は認めても, $(\pm\sqrt{a})^2 = \sqrt{a}^2 = a$ はわかるが, それ以外の平方根はないことは説明されていない。

和と差の積の因数分解の公式, および,

「$AB = 0 \Rightarrow A = 0$ または $B = 0$」

を学んでいれば

$$x^2 = a \Rightarrow x^2 - \sqrt{a}^2 = (x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) = 0$$

だから, $x = \pm\sqrt{a}$ が出てくる。前者の因数分解は式の計算の単元で学び, 後者の性質は２次方程式で学ぶ内容である。一方で, ２次方程式についても, 因数分解して上と同様にするやり方と, 平方完成して, 平方根の上記の性質を用いる場合の２通りがある。例を挙げよう。

$x^2 + x - 2 = 0$ に対して,

$(x-1)(x+2) = 0$	$(x+\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$
$x - 1 = 0$ または $x + 2 = 0$	$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$

よって, $x = 1, x = -2$

２次方程式では, 当然ながら, 平方完成して平方根の性質を使う, 上記の右側のやり方がもっとも一般的であり, それが解の公式となる。２次式の因数分解と２次式＝０という方程式の解との関係は, 中学校では学習せず, 高校の「解と係数の関係」で学ぶことになっている。しかし, 中学生には教えられない内容ではない。ただし, 式の計算が若干複雑である。以下のべてみよう。

$ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式から求めた２つの解を $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とするとき,

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a},$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2} \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

の計算をして, つまり, 解と係数の関係を出しておいて,

$$\begin{aligned}&a(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

上の式を逆にみると, ax^2+bx+c は $a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解されることがわかる。つまり, 与えられた２次式 ax^2+bx+c が $a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できるための必要十分条件は, ２次方程式 $ax^2+bx+c = 0$ の２つの解が, α, β となることである。

なお, 中学校で学ぶ, ２次整数係数多項式で２次の係数が１である式の因数分解, 解の公式を導く際の平方完成, $y = ax^2$ のグラフ, 高校で学ぶ２次式の因数分解（いわゆるたすき掛け）, ２次方程式の解, 判別式, ２次関数の最大・最小, ２次関数のグラフの頂点や x-軸との交点, 平行移動などは, 一連の流れの中で理解する必要があるにも関わらず, 指導要領では, やむ得ない理由があるにせよ, 中学校３年から高校２年まで分断された形で断片的に学ぶことになっている。これらの項目を通してその系統性・連続性を意識して学習することも大切であろう。

4. 整数係数方程式の因数分解

中学３年で, $x^2 + (a+b)x + ab$ の因数分解を学ぶ。たとえば, $x^2 - 8x + 15$ では, 積が 15 で和が -8 となる２数を探すことになる。このとき, ２数とは暗黙のうちに整数に限定されているので, 積が 15 であれば, $ab = 15$ だから, a, b の候補は符号を無視すると, 1 と 15, および, 3 と 5 の組み合わせしかない。

この方法で, 整数 a, b が見つかれば, 何も問題はないが見つからない場合もある。たとえば, $x^2 - x - 1$ などでは, 積が -1 で和が -1 を満たす整数はない。中学校では, $x^2 - x - 1 = 0$ を解の公式を用いて解くことはあっても, 式 $x^2 - x - 1$ を因数分解させる場面は出てこないように配慮されている。

そもそも因数分解というときには, 考える数の範囲が問題になる。今の場合だと, 整数係数の式の積で表すのか, 分数係数まで許すのか, さらには, 平方根をふくむ数の範囲まで考えるのかで, 因数分解は変わってくる。

たまに, $3x^2 - 12x$ の因数分解は $3x(x-4)$ とすべきなのか, $x(3x-12)$ でいいのかが指導上問題となることがある。整数係数に限定して因数分解を考えるなら, $3x(x-4)$ とするのが正しい。しかし, 有理数係数まで広げて考えると, 3 は逆数 $\dfrac{1}{3}$ を持つので, この式の因数

としては意味がないという意見もある。いずれの意見ももっともである。要はどの範囲の因数分解を考えているかである。しかし, 教科書を見る限り, はっきりしない。多くの式は整数係数の場合で, その場合には整数の範囲での因数分解を考えるのは自然である, しかし, $x^2 - \frac{16}{9}$ などの因数分解も教科書の中に出てくることがある, この場合は因数分解を有理数まで拡張して考える必要が出てくる。どの範囲の数について因数分解をするのかなどということを生徒に無理矢理考えさせるのはいたずらに混乱のもととなるであろう。

$3x^2 - 12$ などの式では 3 をくくり出すことによって $3(x^2 - 4)$ となり, 初めて和と差の式の因数分解が使える。このように, 3 がこの式の因数かどうかを問題にするのではなく, 簡単な式に分解するために 3 でくくり出すと言う指導はした方がいいと思われる。

4.1　整数係数多項式の因数分解

整数の範囲の因数分解と有理数の範囲の因数分解に関しては, 次の定理が知られている。この内容は中学生に教えられる内容ではないが, 中学校および高等学校の数学教師としてはきちんと認識しておくべきであろうと考える。

定理 4.1. x の整数係数多項式 $f(x)$ が整数係数の範囲で因数分解できないなら, それは元々, 有理数係数の範囲でも因数分解できない。

この定理により, たとえば, 整数係数 2 次式 $x^2 - x - 1$ は上で述べたように整数の範囲では因数分解できないので, これは有理数の範囲で考えても因数分解できないことがわかる。

定理 4.1 の証明の概略をあげておく。

多項式は, その係数が, すべて整数で互いに素 (つまり共通の真の約数をもたない) とき, 原始多項式と呼ばれる。次の２つの補題の証明は省略する。

補題 4.2. 有理数係数の多項式 $h(x)$ に対して, ある有理数 q と原始多項式 $g(x)$ が一意的に存在して,

$$h(x) = q\,g(x)$$

と表される。

$h(x)$ の係数の共通分母をとって通分し, さらに分子の整数係数多項式の係数の最大公約数でくくり出せば, 上の補題の q および $h(x)$ の存在が示される。一意性については証明は省略する。

補題 4.3. 原始多項式の積は原始多項式になる。

上の２つの補題を認めて定理の証明を与えよう。

定理の整数係数の多項式 $f(x)$ に対して, 係数の最大公約数を d とすると, $f(x) = d\,f_1(x)$ で, $f_1(x)$ は原始多項式である。今, $f(x)$ が有理数上で, $g(x)h(x)$ と因数分解できるすると, 補題 4.2 より $g(x) = a\,g_1(x)$, $h(x) = b\,h_1(x)$(a, b は有理数で, $g_1(x), h_1(x)$ は原始多項式とする) と表される。このとき, 上の補題 4.3, および補題 4.2 の一意性より, 有理数として $d = ab$ であり, かつ, $f_1(x) = g_1(x)h_1(x)$ が成立する。よって, $ab = d$ だから, $f(x) = d\,g_1(x)\,h_1(x)$ が成立する。以上で $f(x)$ は整数係数多項式で因数分解できる。

対偶をとれば, 定理 4.1 が証明できた。

なお, 高校で学ぶ, 整数係数の因数分解のやり方 (たすき掛け) の正当性は, 定理 4.1 にあることを付言しておく。

後書き

この小論を書くにあたって, 主として参考にした教科書は以下のとおりである。教科書は種々たくさん出ており, すべてを見比べたわけではないが, ここで述べている内容は, 下の教科書だけに適用されるものではなく, 他の教科書にも通じる普遍性に配慮したつもりである。

1. 平成 24 度版の中学校教科書 1 年, 啓林館
2. 平成 24 度版の中学校教科書 3 年, 啓林館
3. 平成 22 年度版の高校数学 I, 啓林館
4. 平成 22 年度版の高校数学 A, 啓林館
5. 平成 22 年度版の高校数学 II, 啓林館

参考文献

[1] 佐藤英雄、森杉馨, 中学校・高校数学の構造 (1), 和歌山大学教育学部教育実践総合センター紀要, p.77–82, No.15(2005)

[2] 佐藤英雄、森杉馨, 中学校･高校数学の構造 (2), 和歌山大学教育学部教育実践総合センター紀要, P.83–90, No.16(2006)

[3] 難波完爾著,「数学と論理」, 講座数学の考え方 23, 朝倉書店