$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ が意味するもの

—— 高校数学「三角関数」の教材研究 ——

What it means to learn the equality $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ at the study of trigonometric functions in the high-school mathematics

門　田　　良　信 (Yoshinobu　KADOTA)
和歌山大学教育学部数学専修

(2011 年 10 月 5 日 受理)

高校三学年の数学では「微分・積分」を学習する。その最初の単元である「極限」に必ず現れる等式 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ が意味するものを, 算数 · 数学教育の視点から考察することがこの小論の目的である。

この等式は, 小学生以来直感的に説明されてきた円周の長さや円の面積の公式に証明を与えている。また, この式は古代ギリシャ時代から考察されていて, 円周率の計算法を生み出し, 正弦関数表を作るときにも補間法として利用された。もちろん微分・積分とも深い関係をもつ。

微分・積分を学ぶ準備としての例題に過ぎないのかも知れないが, 図形や三角関数との関係で言えば中身の濃い式である。「何のために数学を勉強するのか?」という問いに答えることは難しい。しかし, この等式は「学んで良かった。」と思わせる例の一つであると思われる。授業では, そのことに配慮した説明を付け加えて欲しいと考える。

キーワード: 弧の長さ, 外接正 n 角形, 三角関数, 円周率, 円の面積, 古代ギリシャの数学, 極限

1. はじめに

高校の数学では, 数学 I で「三角比」, 数学 II で「三角関数と微積分の初歩」, 数学 III で「微分・積分」を学習する。「微分・積分」の最初の単元である「極限」の内容は, 数列の収束と関数の極限である。

「極限」でどの教科書にも例題として扱われる等式 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ が意味するものを, 算数 · 数学教育の視点から考察することが, この小論の目的である。この等式は同じ中心角をもつ弧と弦の長さの比の極限を示している。そのことから展開する図形や関数に関する結果を, 数学史をひも解いて調べることによって数学教育に生かそうと考えるものである。

この等式は, 小学生の頃から直感的説明に終始してきた円周の長さや円の面積, 円周率について, 解析的な証明を与えてくれる。

また, この等式は三角関数に関する基礎として古代ギリシャ時代から考察されている。もちろん, 当時は三角関数も関数概念も極限も無かった。(第 4 節 図 4.1 参照。) しかしこの等式は, アルキメデスの円周率の計算法を導く証明に用いられている。また, プトレマイオスが正弦関数表を作るときにも補間法として巧みに利用されている。

数学 III では正弦関数の微分のための準備の一つに過ぎないのかも知れないが, 図形や三角関数との関係で言えば中身の濃い式である。

この小論では上記の事実を説明した後に, 最後の節で高校の数学教育に生かすための方向性を考察する。微積分との関係には触れない。

「何のために数学を勉強するのか?」という問いに答えることは難しい。その原因の一つは数学があまりに基本的あるいは抽象的であり, それゆえに様々な応用をもつことにある。その中でこの等式は, 生徒達に「数学を学ぶ意義」を伝えてくれる好例であると考える。生徒たちが「学んで良かった。」と思えるような, この等式から広がる数学あるいは数学史的説明を少しでも付け加えて欲しいと思う。

ところで, 高校教育では, 数学 III は選択科目であり多くの生徒は数学 II, 数学 B で数学の課程を修了してしまう。その場合には極限に関する説明を少しだけ加えて, 数学 II の三角関数や微積分を学習した後に, 授業の中でこの等式のもつ意味を伝えて欲しい。

この小論の構成を述べておく。

次の第 2 節ではこの等式の意味を明確にするために, 教科書にある証明を解説し, 正多角形による円の近似定理の一つを系として導く。

第 3 節ではこの等式についてさらに深く考察する。結果として区分求積法による円周の長さの公式と面積の公式を導く。この節は次節の準備となる。

第 4 節では, この等式の原型と思われるアリスタルコスの定理を三角関数を使って証明する。また, その定理がこの等式に関するより詳細な結果をもたらすことを見る。

第 5 節では, アルキメデスの円周率の計算法を説明する。ユークリッド幾何学によって証明された逐次近似法を使って, 円周率が求められる。そこではこの等式が近似法の正しさを導くことが理解できる。

第 6 節では, プトレマイオスが正弦関数表を作るときに補間法としてアリスタルコスの定理を利用したことを

説明する。

第 7 節は, 議論のまとめとして, この等式を学ぶ意義について数学教育の視点から考える。また, 著者なりの数学史的視点から, 三角関数を学ぶ意義や面白さについて言及する。

第 3, 4 節では, この等式の証明の一部を改良することによって 2 節より豊富な結果を導いている。第 5, 6 節ではこの等式の応用を説明している。第 3, 4 節は三角関数を使った理論であるが, これらの節をとばして読んでも 5 節と 6 節の応用に関する本筋は理解できると思う。

2. 等式の意味

角の大きさを表すには度数法を使ってきたが, 微分積分を考える上では数学 II で学習する弧度法が便利である。少しだけ説明しておきたい。

おそらく古代エジプトで測量士たちが活躍していた頃から

$$\frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径の長さ}} = \text{一定の値}$$

となることは知られていたと思われる。この一定の値を円周率とよび π と表す。円の半径を r, 円周の長さを ℓ とすれば, この関係は

$$\ell = 2\pi r \tag{2.1}$$

と表される。π は 3 よりも少し大きい値となる。

いま, 半径 1 の円を考え 中心角 d° をもつ弧の長さを $\ell(d^\circ)$ とすると (2.1) より

$$\ell(d^\circ) = 2\pi\left(\frac{d^\circ}{360^\circ}\right) = \pi\left(\frac{d^\circ}{180^\circ}\right) \tag{2.2}$$

となる。しかしいつも $\left(\dfrac{d^\circ}{180^\circ}\right)$ を計算するのは面倒くさい。

中心角と弧の長さは比例しているのだから, いっそのこと半径 1 の円の中心角の大きさを弧の長さで直接表した方が便利だろう。それには (2.2) から 180° を π とすればよい。新しい角度の単位, ラジアンを

$$180^\circ = \pi \qquad (\text{ラジアン}) \tag{2.3}$$

とする。つまり

$$1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)\ (\text{ラジアン}),$$

$$1\ (\text{ラジアン}) = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = 57.29578\cdots^\circ$$

と単位を変更する。

このとき, 中心角 x (ラジアン) をもつ弧の長さは (2.2) より

$$\ell(x) = 2\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right) = x \qquad (0 < x \leqq 2\pi) \tag{2.4}$$

を満たすことになる。(図 2.1(1) 参照。) 中心角 1 (ラジアン) をもつ弧の長さは 1 となる。(2.3) の変換の一部を表 2.2 に示しておく。

図 2.1

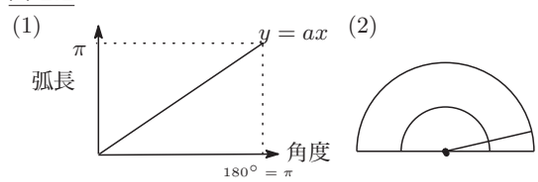


表 2.2

度数法	1°	30°	45°	約 57.3°	60°	90°
弧度法	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

半径 r 中心角 x (ラジアン) の扇形の弧の長さを $\ell(x)$ としその面積を $S(x)$ と表す。弧の長さは半径に比例するから (図 2.1(2) 参照。)

$$\ell(x) = 2\pi r \times \frac{x}{2\pi} = rx \tag{2.5}$$

$$S(x) = \pi r^2 \times \frac{x}{2\pi} = \frac{1}{2}r\ell(x) \tag{2.6}$$

と表される。

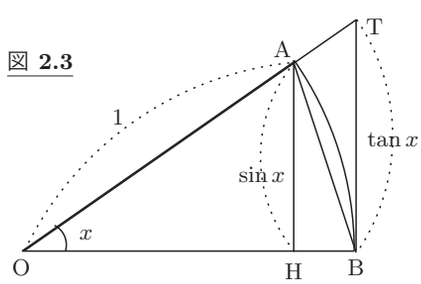
この小論の主題となる等式を定理の形で与えよう。

定理 2.1. 次の等式が成り立つ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{2.7}$$

証明 (i) 中心を O とする半径 1 の円周上に任意の点 A, B をとり, $\angle$ AOB $= x$ として, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のときを考える。点 A から OB に下ろした垂線を AH, 点 B における円の接線が OA の延長と交わる点を T とする。

図 2.3



このとき

$$\triangle\,\text{AOB の面積} < \text{扇形 AOB の面積} < \triangle\,\text{OBT の面積}$$

となる。この関係を式で表せば (2.5) と (2.6) より

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\tan x$$

となる。したがって

$$\sin x < x < \tan x \tag{2.8}$$

が成り立つ。 各辺を $\sin x > 0$ で割り逆数をとると

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{より} \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

となる。$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ となることより $x > 0$ ならば $x \to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ が成り立つ。

(ii) $-\frac{\pi}{2}<x<0$ のときは $x=-y,\ y>0$ とおくと $\sin x=-\sin y$ となるので $y>0$ に (i) の結果を適用すると (2.7) が示される。 □

以下では, 2 点 X, Y を結ぶ線分の長さを $\overline{\mathrm{XY}}$ と表す。また X, Y が同一の円周上にあるとき, 弧 XY の長さを $\widehat{\mathrm{XY}}$ と表す。

[注意 2.1] (1) (2.7) は, 弧と弦の長さを比べていて

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\widehat{\mathrm{AB}}}=1 \tag{2.9}$$

を意味している。この事実は半径に関係なく成り立つ。

(2) 証明では三角形や扇形の面積を考えているが, (2.9) は長さを比べている。そのカラクリは (2.8) にある。(2.8) は

$$\overline{\mathrm{AH}}<\widehat{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{BT}} \tag{2.10}$$

を意味している。極限概念を (2.8) に適用することによって定理 2.1 は導かれている。

半径 1 の円を切りとってできる扇形 AOB の中心角を x としておく。x を n 等分してできる弧 AB の分点を $\mathrm{A}=\mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_n=B$ とする。$\widehat{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}}=\dfrac{x}{n}$ (弧度法) となる。弧 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ の中点を M とすると, $\angle\mathrm{A}_i\mathrm{OM}=\dfrac{x}{2n}$ となる。線分 OM と弦 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ は垂直だから $\overline{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}}=2\sin\dfrac{x}{2n}$ となる。

弦 $\overline{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}}$ の総和 $2n\sin\dfrac{x}{2n}$ は n を大きくとれば $\widehat{\mathrm{AB}}=x$ (弧度法) を近似することが, 次の系 2.2 から導かれる。

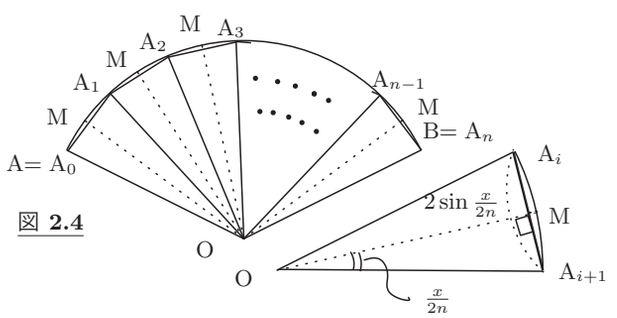


図 2.4

系 2.2. 任意の実数 x について次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}2n\sin\frac{x}{2n}=\lim_{n\to\infty}2n\tan\frac{x}{2n}=x \tag{2.11}$$

証明 $x=0$ のとき (2.11) は $0=0$ となって成り立つ。$x\neq 0$ のとき (2.11) の極限の中身を変形すると

$$2n\sin\frac{x}{2n}=x\left[\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2n}\right)}{\left(\dfrac{x}{2n}\right)}\right] \tag{2.12}$$

となる。n を大きくとると $x_n=\dfrac{x}{2n}$ は 0 に近づく。これより (2.7) を適用すると (2.11) の前半の等式が示される。

$\tan x_n=\dfrac{\sin x_n}{\cos x_n}$ であり, n を大きくとると $\cos x_n$ は 1 に近づく。(2.11) の前半の等式により後半の等式も成り立つ。 □

[注意 2.2] $x=360^\circ=2\pi$ とおくと, 系 2.2 の sin 関数に関する極限は「円に内接する正 n 角形の周の長さは, n を大きくすると円周の長さに近づく。」ことを示している。tan 関数の極限の方は, 円に外接する正 n 角形についても同様なことが言えることを示しているのだが, それは次節で調べる。

弧度法を使ったことは定理や系に現れる式を簡単に記述することに役立っている。しかし, 次節以降では別の意味での紛らわしさを避けるために, なるべく度数法を用いることにする。古代ギリシャでも度数法を使っている。弧度法を使うときには必ずそのことを明記しよう。

3. 円と接正 n 角形

この節では, 円に内接する正 n 角形と外接する正 n 角形の周の長さが, 辺数を増やすときに (n を大きくとるときに) 円周の長さに逐次近似していくことを, 系 2.2 よりも詳しく示す。そのことから, 円の面積の公式や円周の長さの公式が得られる。

この節の目的は次の第 4 節の準備を行うことでもある。理論的にこだわらない読者は, この節と第 4 節をとばして第 5, 6 節を直接読んでも筋書き的な理解はできるであろう。

半径 1 の円の円周の長さを ℓ, 内接する正 n 角形の一辺の長さを s_0, 周の長さを ℓ_0 とする。また, 外接するする正 n 角形の一辺の長さを s_1, 周の長さを ℓ_1 とする。もちろん

$$\ell_0=ns_0,\quad \ell_1=ns_1$$

となる。正 6 角形の場合を描くと図 3.1 になる。

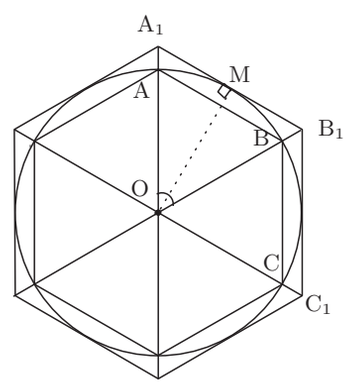


図 3.1

$s_0,\ s_1$ が張る中心角は $\dfrac{360^\circ}{n}$ となる。中心角の 2 等分線 OM を考えると図 3.2(1) より

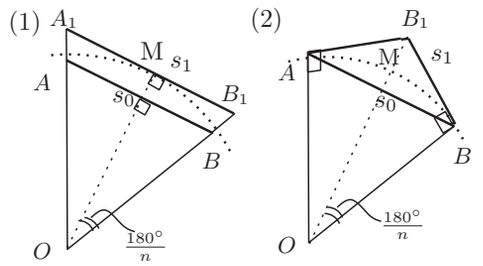
$$\begin{aligned} s_0&=\overline{\mathrm{AB}}=2\sin\frac{360^\circ}{2n}=2\sin\frac{180^\circ}{n}\\ s_1&=\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2\tan\frac{180^\circ}{n}\end{aligned} \tag{3.1}$$

と表される。

内接正 n 角形をそのままにして, 外接正 n 角形だけを $\dfrac{180^\circ}{n}$ 回転させた図が図 3.2(2) である。s_1 は 2 本の接線を使って $s_1=\overline{\mathrm{AB_1}}+\overline{\mathrm{BB_1}}$ と表される。

図 3.2(2) で見る限り　$0 < \overline{\mathrm{AB}} < \widehat{\mathrm{AB}} < s_1$ だから, $0 < \sin\dfrac{x}{2} < \dfrac{x}{2} < \tan\dfrac{x}{2}$ となって (2.8) が導かれそうである。見た目だけでなく理論的に考えてみよう。

図 3.2 (図 3.1 の拡大図)



補助定理 3.1. 半径 1 の円に弧 AB をとり, その中心角を $x > 0$ とする。$n = 1, 2, \cdots$ について

$$a_n = 2^n \sin\frac{x}{2^n}, \quad b_n = 2^n \tan\frac{x}{2^n}$$

と定義すると次が成り立つ。

(1) a_n は弧 AB を 2^{n-1} 等分してできる 2^{n-1} 個の弦の長さの総和を表し

$$0 < a_n < a_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \widehat{\mathrm{AB}}$$

(2) b_n は点 A, B での接線および弧 AB を 2^{n-1} 等分してできる $2^{n-1} - 1$ 個の分点における接線をつないでできる折れ線の長さを表し

$$b_n > b_{n+1} > 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \widehat{\mathrm{AB}}$$

証明　$x_n = \dfrac{x}{2^n}$ とおく。$2x_n$ は x を 2^{n-1} 等分した中心角になる。中心角 $2x_n$ の扇形の弦の長さは $2\sin x_n$ であり, それに弦の個数をかけた $a_n = 2^n \sin x_n$ は, 小さな扇形が作る弦の長さの総和となる。

(i) 2 倍角の公式を使って

$$0 < \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} = 2\sin x_1$$

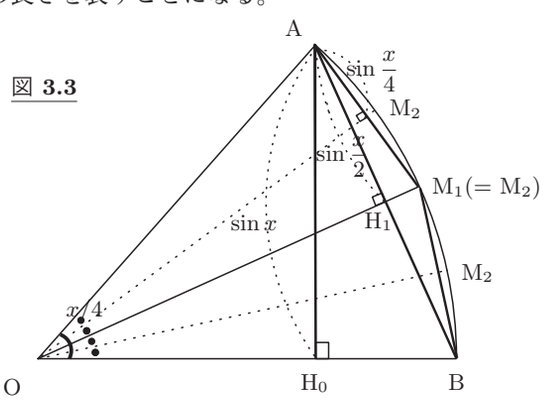
となる。これを続けていくと

$$0 < a_n = 2^n \sin x_n < 2^{n+1}\sin\frac{x_n}{2} = a_{n+1}$$

を得る。

次の図 3.3 は $n = 1, 2$ のときを描いたものである。$a_1 = \overline{AB}$,　$a_2 = \overline{AM}_1 + \overline{M_1B}$ となる。a_3 は $\overline{\mathrm{AM_2}}$, $\overline{\mathrm{M_2M_1}}$, $\overline{\mathrm{M_1M_2}}$, $\overline{\mathrm{M_2B}}$ の和となる。これより a_n は 点 A から点 B までを 2^{n-1} 等分した分点 M_{n-1} をつなぎ合わせた折れ線の長さを表すことになる。

図 3.3



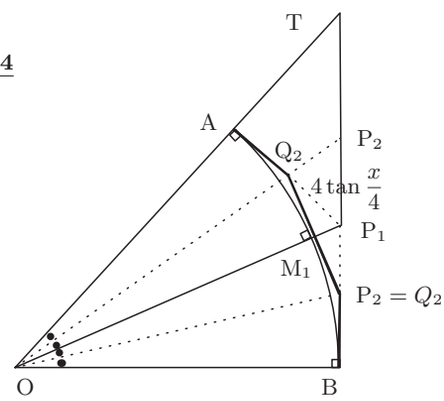
(ii) $0 < \tan\frac{x_n}{2} < 1$ となるので 2 倍角の公式を使って

$$b_n = 2^n \tan x_n = 2^n \frac{2\tan\frac{x_n}{2}}{1 - \tan^2\frac{x_n}{2}}$$
$$> 2^{n+1}\tan x_{n+1} = b_{n+1} > 0$$

が導かれる。

次の図 3.4 は $n = 1, 2$ のときを描いたものである。図 3.3 の OA, $\mathrm{OM_1}$, $\mathrm{OM_2}$ の延長と点 B での接線との交点をそれぞれ T, $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$ とする。これより $\tan x = \overline{\mathrm{BT}}$, $b_1 = \overline{\mathrm{AP_1}} + \overline{\mathrm{P_1B}}$ である。点 A, 点 B とその隣りの点 $\mathrm{M_1}$ での接線の交点を $\mathrm{Q_2}$ とすると, b_2 は点 A, $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{Q_2}(= \mathrm{P_2})$, B を結ぶ折れ線の長さとなる。これより b_n は点 A, 点 B での接線および 2^{n-1} 等分してできる分点 M_{n-1} における接線をつなぎ合わせてできる折れ線の長さを表す。

図 3.4



(iii) 以下では x を弧度法で表しておくと, (2.4) より $\widehat{\mathrm{AB}} = x$ である。a_n は弧 AB 上の分点を結んだ折れ線の長さだから, $a_n < x$ となる。$a_n < a_{n+1}$ より $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \leqq x$ とおく。同様に $\lim_{n\to\infty} b_n = x_1 > 0$ とおく。

扇形 OAB の面積を S, 半径 OA, OB と a_n, b_n で示される折れ線の作る多角形の面積をそれぞれ $S_0(n)$, $S_1(n)$ とおくと $S_0(n) < S < S_1(n)$ かつ

$$S_0(n) = \frac{1}{2}a_n\cos\frac{x}{2^n}, \qquad S_1(n) = \frac{1}{2}b_n$$

となる。よって $S_0 = \lim_{n\to\infty} S_0(n)$, $S_1 = \lim_{n\to\infty} S_1(n)$ とおくと

$$S_0 = \frac{1}{2}x_0, \qquad S_1 = \frac{1}{2}x_1 \tag{3.2}$$

となる。一方 $b_n = a_n\left(\dfrac{1}{\cos x_n}\right)$ だから

$$S_1 - S_0 = \frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty} a_n\left(\frac{1}{\cos x_n} - \cos x_n\right)\right\} = 0$$

が成り立つ。よって $S_0 = S = S_1$ かつ $x_0 = x_1$ が成り立つ。

いま $x_0 < x$ と仮定すると $x_1 < x$ となり, (3.2) より $S_1 < S$ となって $S_0 = S = S_1$ に矛盾する。以上より $x_0 = x_1 = x$ が成り立つ。　□

[注意 3.1] 系 2.2 と補助定理 3.1 はよく似ているが異なる。その違いについて 2 つ程注意したい。

(1) 系 2.2 では与えられた扇形の弧を n 等分してできる弦の長さを考えたが, 補助定理 3.1 では 2^{n-1} 等分することを考えた。2^{n-1} 等分しておくと $a_n < a_{n+1}$ の関係

がすぐに導かれて大変有用である。系 2.2 で同じことを言うには後の系 4.2(2) まで待たなければならない。

(2) 定理 2.1 の証明では (2.8) を導くために, 円の周の長さと面積の公式である (2.5) つまり (2.1) と (2.6) を使った。しかし補助定理 3.1 の証明ではそれらを使わずに系 2.2 とほぼ同等のことを導いている。(実際, 証明 (iii) では扇形の面積 S を三角形による区分求積法で求めている。また, 証明 (i) では長くなることをいとわなければ, 弧の長さ x を一松 [8] のように厳密に求めることも出来る。)

したがって逆に, 補助定理 3.1 から円の周の長さや面積の公式を導くことも出来る。そのことを次の 2 つの系で述べておく。

系 3.2. 定理 2.1 と系 2.2 は (2.5) や (2.6) に無関係に成立する。

証明 補助定理 3.1 により (2.8) が成り立つことが次のように示される。

$$\sin x < 2\sin\frac{x}{2} < \widehat{\mathrm{AB}} = x < 2\tan\frac{x}{2} < \tan x$$

したがって, 注意 2.1(2) で述べたように (2.5) や (2.6) を使わなくても定理と系は示される。 □

系 3.3. 半径 r の円の周の長さを ℓ, 面積を S とすると

$$\ell = 2\pi r, \qquad S = \pi r^2 \tag{3.3}$$

が成り立つ。

証明 2 点 A, B を円周上の同一の点にとり $\ell = \widehat{\mathrm{AB}}$ とおく。$\angle$ AOB$= x = 360^\circ = 2\pi$ として, 半径 r の円で考える。

$$c_n = 2^n r\sin\frac{x}{2^n}, \qquad d_n = 2^n r\tan\frac{x}{2^n}$$

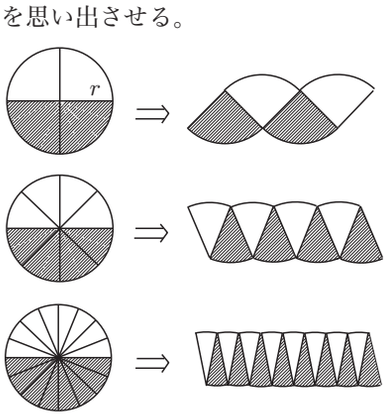
と定義すると補助定理 3.1 より

$$\ell = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = \widehat{\mathrm{AB}} = 2\pi r$$

が成り立つ。$\{c_n\}$, $\{d_n\}$ は円周の長さ ℓ を多角形の周の長さで測った値であり, 左辺の $2\pi r$ は弧度法と半径の比によって得られたものである。

また, (3.2) は半径 r の円で $S_0 = \dfrac{1}{2}r\ell$ を示している。$S_0 = S$ により (3.3) が示される。 □

系 3.3 は円の面積を 2^{n-1} 等分した三角形の面積の総和で近似している。そのことは小学校のときに習った次の図 3.5 を思い出させる。



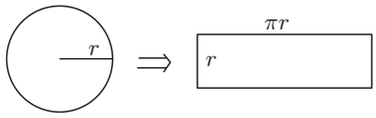
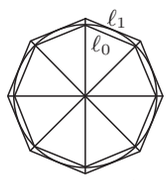


図 3.5 (細分を続けると, 円の面積は縦が r 横が πr の長さの長方形の面積に近づく。)

しかし, 本当に長方形になるだろうか。長さ r の縦の線が垂直に近づいていくのはよいが, 横の線はかまぼこ型をつないでいったもので, これが直線になって長さがちょうど πr に一致するだろうか。円を 8 等分してできる扇形を図 3.5 のように並べ替えたものが次の図 3.6 である。

上下にできるかまぼこ形が半円周でありその長さは π, 内接正 8 角形の各辺の和は 2 本の線分の和 ℓ_0 となり, 外接正 8 角形の各辺の和 ℓ_1 もそうなる。



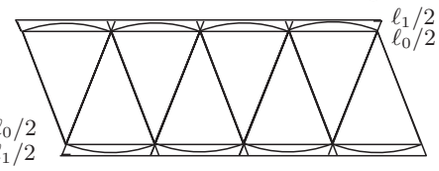


図 3.6

ℓ_1 では上下にできる大変小さな 6 個の二等辺三角形の底辺の部分だけ重複して並んでいる。

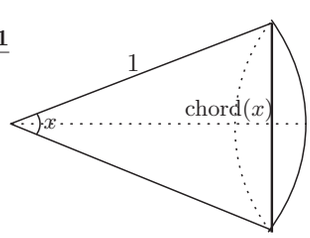
この細分を続けると $\dfrac{\ell_0}{2}$ と $\dfrac{\ell_1}{2}$ は長さが一致して πr となり, 面積は (3.3) で求められる。この節で考えたことは図 3.5 や図 3.6 の正しさを確かめたことになる。

4. アリスタルコスの定理

定理 2.1 に関係した事実は大変古くから研究されていた。その原型として数学史上で重要と思われるサモスのアリスタルコス (前 310–230 年) による定理を考えよう。この定理は定理 2.1 と系 2.2 の収束の仕方を逐次的に導いている。また, 次の第 5, 6 節でも巧みに利用される。

今まで三角関数を使って来たが, それらが古代ギリシャにあったわけではない。あったのは三角比を表す chord(x) とよばれるもので, 半径 1 の円の中心角 x が張るの弦の長さを意味していた。

図 4.1



現代の正弦関数と比べると次のようになる。

$$\begin{cases} \mathrm{chord}(x) = 2\sin\dfrac{x}{2} \\ \mathrm{chord}(2x) = 2\sin x \end{cases}$$

一方で, $\cos x$, $\tan x$ に対応した記号ががなかったことは不便だったろうと思われる。

Boyer[1] によれば, アリスタルコスの証明は現在に伝わっていない。次の証明は著者が付け加えたものである。今まで通り三角関数を使う。

定理 4.1. 中心を O とする半径 1 の円の円周上に 3 点 A, B, C を順にとり, 弧 AB, 弧 BC の張る中心角をそれぞれ x, y とする。$0^\circ < x < y < 90^\circ$ となるとき

$$1 < \frac{\sin y}{\sin x} < \frac{y}{x} = \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}} < \frac{\tan y}{\tan x} \tag{4.1}$$

が成り立つ。((4.1) の $\dfrac{y}{x}$ は比だから度数法でも弧度法でもかまわない。)

証明 (i) $0 < x < y < 90^\circ$ より $0 < \dfrac{\cos(y/2)}{\cos(x/2)} < 1$ となることに注意して 2 倍角の公式を使うと, 次の不等式を得る。

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} < \frac{2\sin\frac{y}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

これをくり返すと $n = 1, 2, \cdots$ について

$$\frac{\sin y}{\sin x} < \frac{2\sin\frac{y}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} < \frac{2^n\sin\frac{y}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \tag{4.2}$$

が成り立つ。

(4.2) で $n \to \infty$ にとり分子分母に補助定理 3.1(1) を適用すると

$$\frac{\sin y}{\sin x} < \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{y}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\widehat{\mathrm{BC}}}{\widehat{\mathrm{AB}}} = \frac{y}{x}$$

が成り立つ。

(ii) $0 < x < y < 90^\circ$ より $0 < \tan\dfrac{x}{2} < \tan\dfrac{y}{2} < 1$ となるので

$$\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{y}{2}} > 1$$

が成り立つ。これより 2 倍角の公式を使って次の不等式を得る。

$$\frac{\tan y}{\tan x} = \frac{2\tan\frac{y}{2}(1-\tan^2\frac{x}{2})}{2\tan\frac{x}{2}(1-\tan^2\frac{y}{2})} > \frac{2\tan\frac{y}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} \tag{4.3}$$

(4.3) を n 回くり返し使って次の不等式を得る。

$$\frac{\tan y}{\tan x} > \frac{2\tan\frac{y}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} > \frac{2^n\tan\frac{y}{2^n}}{2^n\tan\frac{x}{2^n}} \tag{4.4}$$

(4.4) で $n \to \infty$ にとり分子分母に補助定理 3.1(2) を適用すると

$$\frac{\tan y}{\tan x} > \frac{2\tan\frac{y}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} > \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\tan\frac{y}{2^n}}{2^n\tan\frac{x}{2^n}} = \frac{\widehat{\mathrm{BC}}}{\widehat{\mathrm{AB}}}$$

が成り立つ。以上により定理が示された。 □

系 4.2. (1) $0^\circ < x < y < \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ とし, x, y を弧度法で表すと次の不等式が成り立つ。

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin y}{y}, \qquad \frac{\tan x}{x} < \frac{\tan y}{y}$$

(2) $x_n = \dfrac{x}{n}$ とおくと次の不等式が成り立つ。

$$n\sin x_n < (n+1)\sin x_{n+1},$$
$$n\tan x_n > (n+1)\tan x_{n+1}$$

証明 (1) (4.1) の左辺に $\dfrac{\sin x}{y} > 0$ をかけると最初の不等式が得られる。(4.1) の右辺に $\dfrac{\tan x}{y} > 0$ をかけると第 2 の不等式が得られる。

(2) $x_{n+1} < x_n$ だから (2.12) の変形と (1) の結果を使うと

$$\begin{aligned} n\sin x_n &= x\left[\frac{\sin x_n}{x_n}\right] < x\left[\frac{\sin x_{n+1}}{x_{n+1}}\right] \\ &= (n+1)\sin x_{n+1} \end{aligned}$$

が得られる。同様にして $n\tan x_n$ に関する不等式も得られる。 □

系 4.2 は系 2.2 で収束が単調となることを示している。そのことは次の第 5, 6 節の理論で役立つ。

5. アルキメデスの円周率

シラクサのアルキメデス (前 287–212) の方法によって円周率の値を求める。定理 2.1 の言い換えである系 2.2 が理論的に効いていることに注意してほしい。

第 3 節の記号を使って半径 1 の円を考えよう。図 2.3 の弧 AB は図 3.1 の弧 AM として描かれている。したがって (2.10) を 2 倍に延長した式は図 3.1 の記号を使うと

$$\overline{\mathrm{AB}} < \widehat{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{A_1B_1}} \tag{5.1}$$

と表される。この式を n 倍すると

$$\ell_0 < \ell = 2\pi < \ell_1 \tag{5.2}$$

が導かれる。つまり円周の長さは, その円に内接する正 n 角形の周の長さよりも大きく外接する正 n 角形の周の長さよりも小さい。

$s_0 = \overline{\mathrm{AB}}$, $s_1 = \overline{\mathrm{A_1B_1}}$ だから (5.1) と (3.1) を使って (5.2) を書き直すと

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < \pi < n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \tag{5.3}$$

が導かれる。計算に便利なように書き直すと

$$\frac{n}{2}s_0 < \pi < \frac{n}{2}s_1 \tag{5.4}$$

となる。

(2.11) において $x = 360^\circ (= 2\pi)$ とおくと, n が大きくなれば (5.3) の両側の項は π に近づいていくことが, 系 2.2 によって保証される。その近づき方は, n の値を 1 つ増すごとに改善されていくことが系 4.2(2) によって解る。

アルキメデスは円に内接および外接する正 6, 12, 34, 48, 96 角形を使って円周率 π の近似を得た。$n = 6\cdot 2^{m-1}$, $m = 1, 2, 3, \cdots$ とおいて (5.3) を計算したことになる。もちろん, その時代には三角関数はなかったから, 彼は独自の工夫を施した。次の定理はその方法を示している。

定理 5.1. 中心を O とする半径 1 の円周上に 2 点 A, B をとる。$\angle$ AOB $< 180^\circ$ となる側に弧 AB の中点をとって M とする。点 M での接線が OA および OB の延長と交わる点をそれぞれ A_1, B_1 とする。点 A から OB に下ろした垂線を H とする。

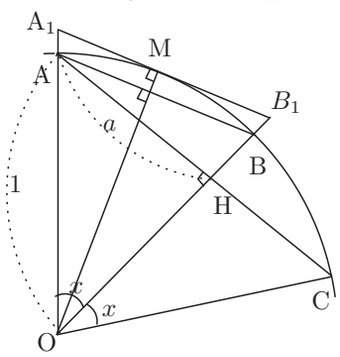
このとき $\overline{\mathrm{AH}}=a$ とおくと

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2(1-\sqrt{1-a^2})}, \tag{5.5}$$

$$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\frac{2}{a}(1-\sqrt{1-a^2}) \tag{5.6}$$

が成り立つ。(図 5.1 参照。点 C は定理 5.2 で考える。)

図 5.1



証明　$\overline{\mathrm{AH}}=a$ よりピタゴラスの定理を使って

$$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{1-a^2}$$

を得る。よって

$$\overline{\mathrm{BH}}=1-\sqrt{1-a^2}$$

となる。再びピタゴラスの定理より

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{BH}}^2}$$
$$=\sqrt{a^2+(1-\sqrt{1-a^2})^2}$$

となり, これを計算して (5.5) が導かれる。

また $\mathrm{A_1B_1}$ は点 M での接線だから OM に垂直であり, $\angle \mathrm{A_1MO}=\angle R=\angle \mathrm{AHB}$ となる。さらに $\angle \mathrm{OA_1M}=\angle \mathrm{OAB}=\angle \mathrm{ABH}$ となり, 2 角が等しいので $\triangle$ABH と $\triangle \mathrm{OA_1M}$ は相似となる。よって

$$\overline{\mathrm{A_1M}}:\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{AH}}$$

である。$\overline{\mathrm{OM}}=1$, $\overline{\mathrm{BH}}=1-\sqrt{1-a^2}$, $\overline{\mathrm{AH}}=a$ を代入して $\overline{\mathrm{A_1M}}=\dfrac{1}{a}(1-\sqrt{1-a^2})$ を得る。$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2\overline{\mathrm{A_1M}}$ より (5.6) が示された。 □

別証　$\angle$ AOB $=x$ とおくと

$$\begin{cases}\overline{\mathrm{AH}}=\sin x\\ \overline{\mathrm{AB}}=2\sin\dfrac{x}{2}\\ \overline{\mathrm{A_1B_1}}=2\tan\dfrac{x}{2}\end{cases} \tag{5.7}$$

となることは明らかである。

$\overline{\mathrm{AH}}=a$ にピタゴラスの定理と三角関数の 2 倍角の公式を適用すると

$$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{1-a^2}=\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$$

よって (5.7) より

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}^2=2\sin^2\frac{x}{2}=\left(1-\sqrt{1-a^2}\right) \tag{5.8}$$

となり (5.5) を得る。再びピタゴラスの定理により

$$2\cos^2\frac{x}{2}=\left(1+\sqrt{1-a^2}\right) \tag{5.9}$$

を得る。(5.8), (5.9) を使って $\tan^2\dfrac{x}{2}$ を計算すると, (5.7) より

$$\overline{A_1B_1}^2=4\tan^2\frac{x}{2}=\frac{4}{a^2}\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)^2$$

となって (5.6) が導かれる。 □

定理 5.2. 中心を O とする半径 1 の円に内接および外接する正 n 角形と正 $2n$ 角形を考える。内接正 n 角形の一辺の長さを $2a$ とすると, 内接および外接する正 $2n$ 角形の一辺の長さはそれぞれ (5.5), (5.6) で与えられる。

証明　定理 5.1 の弧 AB を 2 倍に延長して点 A の対称点を C とする。図 5.1 で内接正 n 角形の一辺の長さを $\overline{\mathrm{AC}}=2a$ と考えると, 内接および外接正 $2n$ 角形の一辺の長さは $\overline{\mathrm{AB}}$ および $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$ となる。 □

アルキメデスに習い $n=6\cdot 2^{m-1}$, $m=1,2,\cdots$ とおいて π の値を少しだけ計算する。定理 5.2 により, 半径 1 の円に内接する正 n 角形の一辺の長さを $2a$ とおけば, 次々に求められる。

$n=6$ のとき

半径 1 の円に内接する正 6 角形の一辺の長さは 1 だから $\overline{\mathrm{AB}}=1$ である。また $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ だから $a=\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。この値を (5.6) に代入すると

$$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

となる。これより (5.4) の両端の値は $3\overline{\mathrm{AB}}=3$, $3\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2\sqrt{3}$ となり, $3<\pi<2\sqrt{3}=3.464$ を得る。

$n=12$ のとき

$n=6$ のときの $\overline{\mathrm{AB}}=1$ が図 5.1 の $\overline{\mathrm{AC}}=2a$ になる。よって $a=\frac{1}{2}$ となる。この値を (5.5), (5.6) に代入すると

$$\overline{AB}=\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right)}=\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=4\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right)=2(2-\sqrt{3})$$

となる。これらを電卓で計算すると $\overline{AB}=0.517638$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=0.5358982$ を得る。よって (5.4) の両端の値は $6\overline{\mathrm{AB}}=3.105828$, $6\overline{\mathrm{AB}}=3.2153904$ となり $3.105828<\pi<3.2153904$ を得る。

$n=24$ のとき

$n=12$ のときの $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ が図 5.1 の $\overline{\mathrm{AC}}=2a$ になるので, $a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ である。以下の計算は省略する。この場合は $3.1326252<\pi<3.1596576$ となる。

さらに $n = 48, 96$ 角形の場合も計算して, アルキメデスは

$$3.140845 = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3.14285871 \qquad (5.10)$$

となることを発見した。π の値を 2 つの近似値ではさんだ (5.10) は心配りが効いている。しかし, その計算は大変骨が折れる。

6. プトレマイオスの正弦表

アレクサンドリアのプトレマイオス (Ptolemaios 後 100 頃− 178 頃) は三角関数の加法定理を導いた。(それで欧米ではこの公式をトレミーの公式とよぶようだ。) それを使って chord(x) の表 (今日に言う正弦表) を作成した。

彼の目的はその表を使って天体運動の解析を行うことと世界地図を作成することにあった。天体運動や世界地図での位置と距離を知るためには球面上の点を表す方法が不可欠である。そのためには chord(x) の値を正確に計算する必要があった。その部分を Katz[3] にしたがって見ていこう。

彼の表は chord$(0°)$ から chord$(180°)$ までを chord$\left(\frac{1}{2}°\right)$ 刻みで作られた。これは正弦関数を $0°$ から $90°$ までを $\left(\frac{1}{4}\right)° = 0.25°$ 刻みで計算したことに相当する。

プトレマイオスがアルキメデスと同様に正 6 角形の辺の長さから始めて 2 倍角の公式を使ったとすれば, 次の角度の正弦値を得たはずである。

$$60°, 30°, 15°, 7.5°, 3,75°, 1.875°,$$
$$0.9375°, 0.46875°, 0.234375° \qquad (6.1)$$

しかし, 一方でギリシャ数学は黄金比と正 5 角形をよく研究していた。詳しい説明は省略するが, 図 6.1 のように半径 1 の円に内接する正 5 角形を描くと頂角が $36°$ の二等辺三角形がたくさん出来る。これより

$$\begin{cases} \sin 36° = \overline{\mathrm{BH}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \\ \cos 36° = \overline{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{1 + \sqrt{5}} \end{cases}$$

となる。

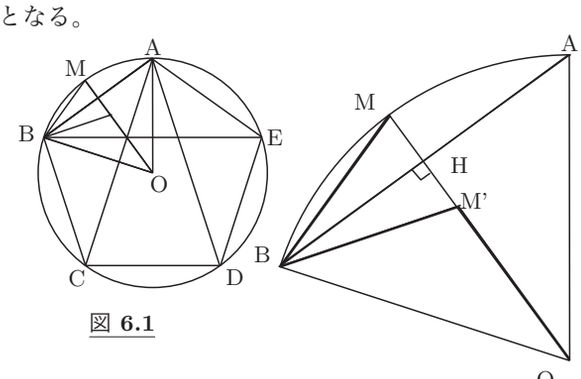


図 6.1

正 6 角形については

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

だから加法定理により

$$\begin{aligned} \sin 6° &= \sin(36° - 30°) \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}\left(\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1\right) = 0.10453 \end{aligned}$$

が導かれる。

これより 2 倍角の公式を使って次の角度の正弦値が得られる。

$$6°, 3°, 1.5°, 0.75°, 0.375°, 0.1875° \qquad (6.2)$$

(6.1) の代わりに (6.2) を計算したことは, 加法定理のおかげでかなり楽をしたことになる。

しかし, $\sin 0.5°$ や $\sin 0.25°$ は求められない。($\sin 3°$ の値から $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ を使って $\sin 1°$ が求まると思うかも知れないが, 一般の 3 次方程式は 16 世紀まで解けなかったし, 計算も面倒である。) そこで彼は第 4 節の定理 4.1(アリスタルコスの定理) を使った。

例えば $x = 0.1875°$, $y = 0.25°$ とするとき

$$\sin 0.1875° = 0.00327249$$
$$\sin 0.375° = 0.00654494$$

が求められたとする。(4.1) より

$$\begin{aligned} \sin 0.25° &< \frac{0.25°}{0.1875°}\sin 0.1875° \\ &= 1.3333333 \times 0.00327249 = 0.00436332 \end{aligned}$$

となる。$x = 0.25°$, $y = 0.375°$ とすると再び (4.1) より

$$\begin{aligned} \sin 0.25° &> \frac{0.25°}{0.375°}\sin 0.375° \\ &= 0.666667 \times 0.00654494 = 0.004363292 \end{aligned}$$

となるので, これらの結果から $\sin 0.25° = 0.004363$ とできる。

あとは三角関数の加法定理などを使って, プトレマイオスは小数点以下 5 桁までの chord 表を作成した。

ところで, 円に内接する正 720 角形を考え, (5.3) で $n = 720$ とおくと, $\sin 0.25°$ の値から円周率が次のように近似される。

$$\pi = 720 \times 0.004363 = 3.141568$$

実際にプトレマイオスが得た値は

$$\pi = \frac{377}{120} = 3.1416$$

であり, (5.10) よりも詳細である。

7. まとめ

(1) 等式 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を学ぶ意義

この等式は「同じ中心角をもつ弧と弦の長さの比は, 中心角が 0 に近づけば 1 になる。」ことを示している。そのことは「円に内接 (あるいは外接) する正 n 角形の周の

長さは, n が大きくなれば円周の長さに近づく。」ことを意味する。アルキメデスは, 円に内接する正 n 角形の一辺の長さから内接および外接する正 $2n$ 角形の一辺の長さを求めることによって, 円周率を反復して計算する方法を発見した。

時を経て, それは様々な機械を生み出し, 球技のボールとなり, 人工衛星を回収する道具となって, 私たちの生活の中にある。

小学校の算数で私たちは, 円と正 n 角形との関係から円の面積や円周率について学ぶ。中学校では, 記号 π と円柱や円錐の体積や表面積を学ぶ。その間, 興味や関心を引くためにアルキメデスの絵や $3.141592\cdots$ の数字, 和算の円周率などが紹介されている。その段階までは図 3.5 や図 3.6 のような, 直感力を頼りに指導上の工夫を重ねる以外にない。

高校で三角関数を学ぶと, 円の解析ができるようになる。しかし, 三角関数の便利さや重要さはなかなか伝えられない。生徒たちに「急にたくさんの公式が出て来てわずらわしい」と受け止められる心配がある。三角関数の応用については十分に理解されないままに終わる懸念が残る。

授業時数などの関係から事情はある程度分かるのであるが, もっと生活との結びつきや学ぶことの意義が感じられる数学の授業展開ができないかと思う。そして, この等式の周辺には, そのような面白さを伝えられる教材が豊富にあると考える。

例えば, この等式やアリスタルコスの定理は, 直感的に知っていた事実を三角関数を使って厳密に示していて, 生徒の数学観を深化させ学習した意義を感じさせると思われる。アルキメデスの円周率の値を求めるアルゴリズムは, ユークリッド幾何や三角関数と生活との結びつきを感じさせてくれる。

円や球に関する公式の証明や補助定理 3.1 や定理 5.1 で扱った帰納的方法などは, 数学的に工夫された見方として面白い内容となる。区分求積法は発想を豊かにしてくれるし, 数学史に関する話はその内容への理解を豊かにしてくれる。

また, 数学の応用について, 三角関数が天文学や地図の作成, 航海術などに使われることは, 数学が生活に役立つことを具体的に伝えている。

(2) 3 人のギリシャ数学者について

アリスタルコスには円と弦に関する様々な研究があるようである。[1] によれば, 彼はこの定理を使って地球から見た太陽と月までの距離の比を求めた。彼の理論は正しかったが, 観測値に誤りがあったと伝えられている。

アルキメデスの円周率を求めるアルゴリズムは, Beckmann[2] によって微積分による方法が発見されるまで約 1800 年間使われた名品と言われている。また彼は, 区分求積法を使って曲面の面積や立体の体積を求めた。古典力学を使った様々な機械を作成したとも伝えられる。彼の業績は数学史の中でも際立っている。(伊達 [6], 林, 齋藤 [7] 参照。)

プトレマイオスの chord を使った加法定理は貴重である。天文学と世界地図の方は, 中世の世界観とそれ以後の世界史に大きな影響を与えたようである。そういった話も数学と人間の歴史が接点をもつ例として大変面白い。([1] や [3] 参照。)

古代ギリシャの数学者達はそれぞれに研究に個性が感じられ, 今日の意味での数学の世界だけに留まっていない面白さがある。

一つだけ断っておきたいことは, この小論に出てきた数学的発見についてはその発見者に諸説があることである。この小論では一応 [1] を参照したが, そのような事情には配慮できていない。

(3) 三角関数から見た数学史

古代から人間はものを数え量を測って生活してきた。社会を形成し国家にまでなると, 土地を測量し地図を作ることや天体を観察して暦(こよみ)を作り時間を測る必要に迫られた。

ユークリッドの幾何学が生まれ, やがて三角法と三角関数が盛んに研究されるようになる。三角関数は図形の性質を数値に直して扱うから, 様々なタイプの図形研究に適応できたと考えられる。おそらく実用上最も重宝された数学的方法であったであろう。数学史上では, 三角関数は曲線を表す関数の代表例としてあるいは運動力学の道具として研究され, 一般的な関数概念の形成や微分・積分の発展に貢献した。

微分・積分と三角関数の結びつきは大変強い。内容の半分は三角関数に関係すると思われるほどである。

その中でも, 逆三角関数のテイラー展開から円周率を求める方法は, よく研究されていてアルキメデスの方法に比べても画期的である。また, 円周率が無理数であることも示される。微分・積分はそのような結果を一部にもつ広範な理論であることが理解される。

数学史としては, 円周率が超越数となることは, 古代ギリシャ以来の「三大作図問題」との関連で面白い。また, 金田 [4] によるコンピュータによる円周率計算の話や齋藤 [5] によるアルキメデスの文献の復活なども興味深い。

ユークリッドの幾何学や解析幾何学と微分・積分をつなぐ数学として, 三角関数は数学史の中で重要な位置にあると思われる。

とくにこの等式は正弦関数の微分 $(\sin x)' = \cos x$ の証明に使われていて, 微分への橋渡しの位置にある。その意味でも古典的な数学を整理し, 新たな数学への発展を促す

教材であると感じる。

参　考　文　献

[1] C. B. Boyer (加賀美鐵雄, 浦野由有訳)「数学の歴史」1〜3, 朝倉書店, (1983).

[2] P. Beckmann(田尾陽一, 清水韶光訳) 「π の歴史」, 蒼樹書房, (1973).

[3] V. J. Katz(上野健爾, 三浦伸夫訳) 「カッツ 数学の歴史」, 共立出版, (2005).

[4] 金田 康正 「π のはなし」, 東京図書, (1991).

[5] 齋藤 憲「よみがえる天才アルキメデス」, 岩波書店, (2006).

[6] 伊達文治 「アルキメデスの数学」, 森北出版, (1993).

[7] 林 栄治, 齋藤 憲「天秤の魔術師 アルキメデスの数学」, 共立出版, (2009).

[8] 一松 信 「解析学序説 (上)」裳華房, (1966).

What it means to learn the equality $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ at the study of trigonometric functions in the high-school mathematics

Yoshinobu　KADOTA

(Dep. Math. Facul. Edu. Wakayama Univ.)

Abstract: It is customary in Japan that high-school students learn calculus as an elective subject after the study of trigonometric functions in the last year of mathematical course. There appears necessarily the equality $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ among examples of limits at the first chapter of calculus in any textbook.

The purpose of the present paper is to consider what meaning and importance it has to learn the equality in the educational course.

The equality shows the length of any arc is approximated by that of the string spanning the same central angle, when the angle is very small. Then, the length of the circumference is approximated by the combined lengths of the inscribed regular polygon's strings.

The equality is pointed out to be a version of Aristarchus' theorem. His theorem was applied to the computing method of the ratio of the circumference π by Archimedes and to a sine function table by Ptolemaios in the time of the ancient Greeks.

Trigonometric functions are applicable to much more complicated shapes compared to Euclid geometry. They have been studied as a main part of the function theory since the 17th century, having significant influence on the development of calculus.

In order to arouse students' interest in mathematics, it is recommended that teachers summerize the circle analysis in their educational course and explain briefly the contribution of trigonometric functions to the developement of calculus, when they are teaching the equality.