平面幾何の歴史的な理論展開と中学校における取り扱いの比較

Comparison with Historical Literatures of the Elementary Geometry

and Textbooks in Junior High School

片山 聡一郎　　田川 裕之

Soichiro KATAYAMA　　Hiroyuki TAGAWA

（和歌山大学教育学部）　（和歌山大学教育学部）

2011 年 8 月 22 日受理

本稿では中学校数学での初等幾何の理論展開と歴史的なユークリッドによる理論, およびヒルベルトによる理論との比較を行う.

1　序

ユークリッド幾何に関する数学史上の重要な文献は, 紀元前 3 世紀頃のユークリッド ($E\upsilon\kappa\lambda\varepsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$) による『原論』(“$\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\alpha$”) と, 19 世紀末に出版されたヒルベルト (*David Hilbert*) による『幾何学基礎論』(“*Grundlagen der Geometrie*”) である. 双方ともに日本語訳は数種あるが, ここでは [2] と [3] を参照した (ただし必ずしも逐語的には引用しない). ユークリッドの『原論』は最初にいくつかの公理の成立を認め, そこから演繹的に論理のみに従って各種の定理を導くというもので, その後の数学研究の一つのスタイルを作った. しかし, いくつかの証明において, 設定した公理からは成立が保証されていない “直観的事実” が用いられていることが長い年月の間に指摘されてきた. ヒルベルトはユークリッド幾何の理論が論理的に完全に展開されるための公理系を提示した. その内容をまとめたものが『幾何学基礎論』である. 本稿では, 特に中学校で扱われている内容が, 『原論』と『幾何学基礎論』でどのような順番で提示され, 示されているのかについて調べ, その後に中学校数学における平面幾何の理論展開との比較を行う.

2　中学校数学での平面幾何の結果

[1] で, 中学校数学の平面幾何に関する証明を論理的にギャップのないものとするための一連の公理を導入した. [1] でも述べたように, (A1)-(A4), (B1)-(B5) は後述の『幾何学基礎論』を参考に導入した幾何学の根幹に関わるものであるから, ここでは特に中学校の教科書で教えられる内容である (C1) 以降を参考のために短縮してまとめておく (重要な部分は太字で書く).

(C1) **2 直線が平行ならば錯角は等しい.**

(C2) **錯角が等しければ, 2 直線は平行である.**

(D1) **角の二等分線が存在する.**

(D2) **直角が存在する.** (さらに直角の大きさは 90°)

(D3) **角とその補角の和は 180° である.**
(あるいは, 補角の大きさ = 180° − 角の大きさ)

(D4) **直線 ℓ と, 直線 ℓ 上にない点 A が与えられたとき, 点 A を通る ℓ の平行線が存在する.**

(E1) **三辺相等な 2 つの三角形は合同である (SSS).**

(E2) **二辺挟角相等な 2 つの三角形は合同である (SAS).**

(E3) **一辺両端角相等な 2 つの三角形は合同である (ASA).**

(E4) **三辺比相等な 2 つの三角形は相似である.**

(E5) **二辺比挟角相等な 2 つの三角形は相似である.**

(E6) **二角相等な 2 つの三角形は相似である.**

三平方の定理の証明に関連して, 面積に関する公理 (F1)–(F2) も仮定したがここでは省略する. 英語で辺を “side”, 角を “angle” というので, (E1)–(E3) に現れる三角形の合同定理を SSS, SAS, ASA と呼ぶことにする. (C1), (C2) は “錯角” を “同位角” に変えて公理としてもよい. 次節以降で明らかになるように, 実は上の公理 (C1)–(E6) の中で真に必要なのは (C1) と (E2) のみである[1].

中学校数学ではこれらを根拠として, 以下の定理が証明されている. [ ] 内に上記の公理, または以下の定理のうち, 教科書における証明での根拠を書いておく[2].

(J1) 対頂角は等しい. [(D3)]

(J2) **2 直線が平行ならば同位角は等しい.** [(C1), (J1)][3]

(J3) **(J2) の逆が成立する.** [(C2), (J1)][4]

---

[1] 定規とコンパスによる作図は考慮に入れなかったが, 正当化したければ後述の公理 (e) も必要となる.

[2] ただし (A1) や, 長さ, 角度に関する (B1), (B3) はいちいち書かない.

[3] こちらを公理と思えば, (C1) が示せることになる.

[4] こちらを公理と思えば, (C2) が示せることになる.

(J4) **三角形の内角の和は 180° である．** また外角は隣り合わない二つの内角の和に等しい．[(C1), (D3), (D4), (J2)]

(J5) n 角形の内角の和は $180(n-2)°$, 外角の和は 360°. [(D3), (J4)]

(J6) 四角形 ABCD において AB = AD, CB = CD ならば ∠ACB = ∠ACD. [(E1)]

(J7) **二等辺三角形の 2 角は等しい．** [(B5), (D1), (E2)]

(J8) 2 角の等しい三角形は二等辺三角形である．[(B5), (D1), (E3), (J4)]

(J9) 斜辺と一鋭角相等の直角三角形は合同. [(E3), (J4)]

(J10) 斜辺と一辺相等の直角三角形は合同. [三角形の移動 ⟨(B2), (E2)⟩, (J7), (J9)]

(J11) 円周角の定理. [(J4), (J6)]

(J12) 平行四辺形の辺や対角線に関する性質. [(C1), (E3), 対角線が交わること ⟨(B5)⟩]

(J13) 平行四辺形になる条件: (i) 2 組の対辺が等しい, (ii) 1 組の対辺が平行で長さも等しい, (iii) 2 組の対角が等しい．[(i): (C2), (E1); (ii): (C1), (C2), (E2); (iii): (D3), (J3), (J5)]

(J14) △ABC で辺 AB, AC 上に点 P, Q がそれぞれあるとき, PQ // BC ならば AP : AB = AQ : AC = PQ : BC. [(E6), (J2)]

(J15) (J14) と同様の状況で AP : AB = AQ : AC ならば PQ // BC が成立する．[(E5), (J3)]

(J16) (J14) と同様の状況で, PQ // BC ならば AP : PB = AQ : QC. [(A4), (D4), (E6), (J2), (J12)]

(J17) (J16) の逆が成立する．系として中点連結定理. [(J15)]

(J18) 平行な 3 直線 ℓ, m, n と直線 $k(k')$ が点 L(L′), M(M′) N(N′) でそれぞれ交わるとき, LM : MN = L′M′ : M′N′ である．[(A4), (D4), (J12), (J15)]

(J19) 三平方の定理. [(E2), (F1), (F2)]

(J20) 三平方の定理の逆. [(B2), (B4), (E1), (J19)]

3　ユークリッドの『原論』

『原論』では, 上記の定理がどのような順番で示されているのかを調べる．『原論』は I〜XIII の全 13 巻からなる．『原論』は当時の数学体系を集大成したもので, 平面幾何や立体幾何などの幾何のみならず数論についても議論されている．『原論』では “長さ” や “角度”, そして “面積” を数で表すことはしない．数を用いずに, 幾何学的に 2 つの “線分”, “角”, “面積” などそれぞれの大小や, それぞれの和が定義されている[5]．2 節に上げた内容の多くは I 巻において扱われる．III 巻は円に関して論じていて, たとえば円周角の定理はここで見られる．線分の比を (長さを数で表さずに) 扱う理論が V 巻で作られ, これと面積の理論を用いて VI 巻で三角形の相似の理論などが展開される．

I 巻からもう少し詳しく中身をみよう (なお I.12 のように書いたとき, “I 巻の 12 番” を意味する)．最初にいくつかの定義がある．“I.1. 点とは, 部分を持たないものである”, “I.2. 線とは, 幅のない長さである”, “I.4. 直線とはその上の点に関して一様に横たわっている線である” などは有名であろう[6]．ただしこれらは現代数学の視点から見ると, 結局は明確には定義されていない言葉への言い換えに過ぎず, 意味を定めたとはいいがたい[7]．他方, “I.10. 直線が直線の上に立てられて接角を互いに等しくするとき, 等しい角の双方は直角であり, 上に立つ直線はその下の直線に対して垂線と呼ばれる”, “I.20. 三辺形のうち, (中略) 二等辺三角形とは二つだけ等しい辺をもつもの, (後略)” などは “接角”, “角が等しい”, “辺が等しい” の意味をつければ, 厳密に意味を持つ (そして本文を読むとそれらの意味するところが理解できる), 明確に概念を定めるものとなっている．次の定義は重要であろう: “I.23. 平行線とは, 同一の平面上にあって, 両方向に限りなく延長しても, いずれの方向においても互いに交わらない直線である”．この後 “公準”, “公理” が述べられる[8]．

公準 (要請)

I.1 任意の点から任意の点へ直線を引くこと．

I.2 および有限直線を連続して一直線に延長すること．

I.3 および任意の点と距離 (半径) とをもって円を描くこと．

I.4 およびすべての直角は互いに等しいこと．

I.5 および 1 直線が 2 直線に交わり同じ側の内角の和を 2 直角よりも小さくするならば, この 2 直線は限りなく延長されると 2 直角より小さい角のある側において交わること．

なお, “有限直線” は線分のことである．公準 I.1–I.3 は直観的には “(目盛りのない) 定規とコンパスで図を描く” ことを許すという意味である．また, 上の公準 I.5 は “平

[5]ただしこれらは証明を読むと間接的に分かるだけで明確には定義されていない.

[6]なおユークリッドの言う “線” は現代的な言い方では “曲線” を意味する.

[7]しかし, 実はこれらの言葉の意味は推論にはなんの影響もない.

[8]ユークリッドのこれらの言葉の使い分けの理由に関しては色々な議論があるようであるが, 今日的にはこれらの用語の使い分けは必ずしも明確ではない.

行線公準 (公理)” として知られるものである．この公準については後で詳しく触れる．

公理 (共通概念)

I.1 同じものに等しいものはまた互いに等しい．

I.2 また等しいものに等しいものが加えられれば, 全体は等しい．

I.3 また等しいものから等しいものがひかれれば, 残りは等しい．

I.4 また互いに重なり合うものは互いに等しい．

I.5 また全体は部分より大きい．

公理 I.1 は現代風にいえば同値関係 (等号や合同関係など) の推移律について述べているようである[9]．公理 I.2, I.3 は線分, 角, 面積などの和や差について成り立つべき性質を, 公理 I.4, I.5 は線分, 角, 面積などの比較について述べていると考えられている[10]．

主要な命題 (定理) とその内容を述べよう (内容は要約であり, [4] の付録も参考にした)．第 2 節で述べた公理・定理と対応する場合は “=(J4)” のように書くことにする．

命題

I.1 与えられた線分上に正三角形を作図すること．

I.2 与えられた点で, 与えられた線分に等しい線分を引くこと．

I.3 より大きい線分から, より小さい線分を切り取ること．

I.4 =(E2)．**SAS.**

I.5 =(J7)．**二等辺三角形の 2 角が等しいこと．**及びそれらの外角が等しいこと．

I.6 =(J8)．2 角が等しい三角形は二等辺三角形．

I.8 =(E1)．**SSS.**

I.9 =(D1)．**角の二等分線を作図すること．**

I.10 線分を二等分すること．

I.11 **直線上の与えられた点を通る垂線を作図すること．**

I.12 直線に, それに含まれない点から垂線を下ろすこと．

I.13 =(D3)．**角とその補角を合わせると 2 直角に等しい．**

I.15 =(J1)．対頂角は等しい．

I.16 三角形の外角は, これに接しない内角のいずれよりも大きい (外角の定理)．

I.23 与えられた角を与えられた点と辺に移すこと．

I.26 =(E3)．**ASA.**

I.27 =(C2)．**錯角が等しければ平行である．**

I.28 =(J3)．**同位角が等しければ平行である．**または同じ側の内角の和が 2 直角に等しければ平行．

I.29 =(C1)．**平行ならば錯角が等しい．**

I.31 =(D4)．**与えられた点を通り, 与えられた直線に平行な直線を引くこと．**

I.32 =(J4)．**三角形の内角の和は 2 直角である．**外角は他の内角の和に等しい．

I.34 =(J12)．平行四辺形の対辺と対角は等しい．

I.47 =(J19)．三平方の定理．

I.48 =(J20)．三平方の定理の逆．

中学校数学に関連した他の巻の命題も挙げておこう．

III.20 =(J11)．円周角の定理．

VI.1 同じ高さの三角形 (の面積) は, それらの底辺と同じ比にある．

VI.2 =(J16), (J17)．直線が三角形の底辺に平行なとき, そのときに限り, それが他の二辺を比例するように切り分ける．

VI.4 =(E6)．**二角相等の三角形の相似定理．**

VI.5 =(E4)．**三辺比相等の三角形の相似定理．**

VI.6 =(E5)．**二辺比挟角相等の三角形の相似定理．**

なお, ユークリッドは “合同” という言葉を使っておらず, 命題の主張は “対応する辺と角が全て等しいこと” という形である．“相似” は VI 巻で次のように定義されている: “VI.1．相似な多角形とは, 角が全て等しく, 対応する辺の比が同じ多角形である．” 中学校で学ぶ内容のうち直角三角形の合同定理は『原論』では見られない[11]．

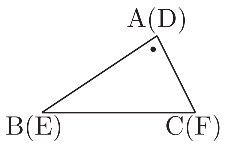
ユークリッドの『原論』はその公理的な構成から数学理論のひとつの手本になった．しかし現代数学的視点から見ると不備が多いのも確かである．定義が明言されていない概念がいくつもあり, 例えば “線分が等しい”, “角が等しい” ということさえ, 実際にその言葉が何を意味するのかは明言されていない．現代人の視点からは “長さが等しい”, “角度が等しい” ことであろうと思いがちだが, 証明を見る限り, むしろ図形の合同として捉えていたのではないかと考える人が多い[12]．より重大な問題は, 直観的には明らかだが仮定した公準・公理からは従わない事が時として証明中で用いられることである．例えば命題 I.4 (**SAS**) の証明は要約すると以下の通りである (先ほどの観点から線分や角が “等しい” ことを, $=$ ではなく, $\cong$ で表しておく):

[9] ただし別の解釈もある．

[10] なお, 後の校訂者によって, いくつかの公理 (例えば “また同じものの半分は互いに等しい” など) が加えられているが, 詳細は略する．

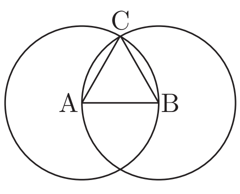
[11] 実は (J9) に対応する結果は命題 III.14 の証明中で示されているが, もう一方は示されていないようである．

[12] 実際, 次節で見るようにヒルベルトはこの観点で幾何学を構成している．



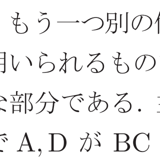
“△ABC と △DEF があって, AB ≅ DE, AC ≅ DF, ∠BAC ≅ ∠EDF とする. △ABC を △DEF に重ね, 点 A が点 D に, 直線 AB が直線 DE に乗るようにする. AB ≅ DE だから, 点 B は点 E に重なる. よって ∠BAC ≅ ∠EDF であることから直線 AC は直線 DF と一致する. AC ≅ DF だから, 点 C は F と一致する. したがって △ABC 全体は △DEF と一致して等しい.” 問題は “△ABC を △DEF に重ね” ることが可能かどうかである. これは公準・公理からは保証されない. したがって, この証明を正当化するように “重ね合わせ” を保証する公準を追加するか, あるいは命題 I.4 自身を公理系に追加する必要が出てくる.

他には図を見ると直観的に当たり前に思われて気がつきにくいギャップもある. 例を挙げよう.



『原論』最初の命題 I.1 は与えられた線分 AB を一辺とする正三角形の作図である. 証明の流れは極めてシンプルである: “公準 I.3 より点 A を中心とする線分 AB を半径とする円が描ける. 同様に点 B を中心とする同じ半径の円が描ける. この二つの円の交点 (の一つ) を C とする. 点 C と点 A, B を線分で結べば (これは公準 I.1 から許される), △ABC は正三角形である.” この証明の不備の一つは, 点 C の存在, すなわち二つの円の交点の存在の論証である. 上記の作図を紙に定規とコンパスをもって行えば, 見た目には交点の存在は “明らか” である. だが論理的に交点の存在を保証する根拠はなにもない. 見えない “隙間” が円にあって, 実は交わっていない可能性も排除できない. 他にも, いわゆる補助線を引く場合などに, 図で見る限り交点を持つことが明らかな 2 直線であっても, そのことの保証が与えられていないことが多い.

もう一つ別の例を与える. 命題 I.7 は I.8 (SSS) の証明に用いられるもので,『原論』における SSS の証明の本質的な部分である. 主張を要約すると “AB ≅ DB, AC ≅ DC で A, D が BC の同じ側にあれば A と D は一致する.” 証明は以下のように進む:



“$A \neq D$ とする. このとき ∠CAD < ∠BAD かつ ∠BDA < ∠CDA. AC ≅ DC より命題 I.5(=(J7)) から ∠CAD ≅ ∠CDA. 同様に ∠BAD ≅ ∠BDA. よって ∠CAD < ∠BAD かつ ∠BAD(≅ ∠BDA) < ∠CAD(≅ ∠CDA) という矛盾を得る. よって $A = D$ である.” 点 D が △ABC の中にある場合が扱われていないという不備はあるが, このときは例えば ∠BAD と ∠BDA の代わりにそれらの補角に注目すればよい[13](第 5 節で紹介するように, 命題 I.5 では, 二等辺三角形の 2 つの補角 (外角) が等しいことも示されている). より大きな問題は ∠CAD < ∠BAD と ∠BDA < ∠CDA が得られる理由である. 矛盾を得る重要な部分であるにもかかわらず論理的には何の説明もされておらず, “図を見るとそうなっている” 以上のことはいえないであろう. このように点や線分の位置関係などを『原論』では直観に訴えている場合がいくつか見られる.

これらの不備を補い, 論理的にユークリッド幾何を完全なものとする公理系を与えたのがヒルベルトである.

4　ヒルベルトの『幾何学基礎論』

『幾何学基礎論』におけるヒルベルトの公理は I〜V の五群に分けられている. ヒルベルトによれば “これらの群のおのおのは, ある同じ種類のわれわれの直観の基礎事実を言い表わす.” 立体幾何ももちろん考えられているのだが, 平面幾何に限定して紹介する.

まずヒルベルトは, “点”, “直線” などという言葉に『原論』のようには定義を与えない. ただ対象となる二つの集合があり, それらの元を便宜上 “点”, “直線” と呼ぶだけである (このようなものを無定義語という). 公理群 I は結合の公理と呼ばれている: “点” と “直線” には “結合する” という関係がある. これも何を “結合する” と呼ぶかは定めず, 以下の関係を満たせばどのようなものでもよい (ただし, 例えばハーツホーン [4] は, ここまで形式化は行わず, “点” の属する全体集合を Π とするとき, 直線を (特別な性質をもつ)Π の部分集合とし, 点 A と直線 ℓ の “結合する” という関係は $A \in \ell$ のこととしてヒルベルト [3] の議論を簡略化している).

内容は要約すると以下の通りである (以下では, 2 点といえば相異なる 2 点のこととする): “**$\mathbf{I_1}$. 与えられた 2 点を通る直線が存在する**”; “**$\mathbf{I_2}$. 2 点を通る直線は高々1 つである**”; “**$\mathbf{I_3}$. どの直線上にも少なくとも 2 点が存在する. 一直線上にない少なくとも三点が (平面上に) 存在する.**” 我々の $(A1)(= I_1 + I_2)$, $(A2)(= I_3)$ はこの群の公理をまとめたものである.

公理群 II は順序の公理と呼ばれる. これは直線上に点が順序をもって並ぶ様を表すものであり,『原論』では曖昧であった概念である. 一直線上の点に対して “間” という関係があり次の性質を持つことが要請される (“間” は無定義語である): “**$\mathbf{II_1}$. 点 B が点 A と C の間にあれば, これらは一直線上にあって, B は C と A の間に**

[13]他には点 A, D の役割が入れ替わった場合も考えなければならないであろう.

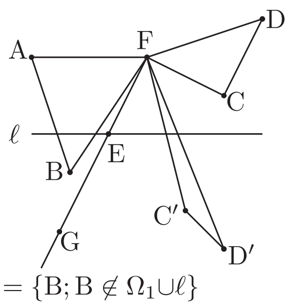
ある”; “**$\mathbf{II_2}$．直線** AB **上に点** C **があって，** B **が** A, C **の間にある**”; “**$\mathbf{II_3}$．一直線上の任意の 3 点のうち他の 2 点の間にあるような 1 点が存在して**[14]**一意である**” これをまとめたのが我々の (A3) である．この “間” の概念を使って “線分” が定義される (点 A, B, 及び点 A, B の間にある点全てからなる直線 AB の部分を線分 AB という)．

もう一つ, 我々の (A4) にあたる “パッシュの公理”, すなわち “**$\mathbf{II_4}$．一直線上にない 3 点** A, B, C **があり，直線** ℓ **がこの 3 点のいずれも通らないとき，もし** ℓ **が線分** AB **と交わるならば，** ℓ **は線分** AC **か** BC **の一方のみ**[15]**と交わる**” ことが要請される．これは論理的に線分の交点の存在を保証するために用いられる．

公理群 I, II を仮定すると例えば次のことが示される．

定理 4.1. 平面上の任意の直線 ℓ はこの直線上にない平面の点を次のような空ではない 2 つの領域に分ける: 異なる領域から任意の点 A, B をとると, 線分 AB は直線 ℓ と交点を持つ．同じ領域から任意の点 C, D をとると, 線分 CD は直線 ℓ と交点を持たない．

パッシュの公理の使い方を見るために, また『幾何学基礎論』の雰囲気を知るために, この定理 4.1 を示しておこう (証明は本質的には [4] に従った)．表記を簡単にするために, AB は直線 AB, $\overline{\mathrm{AB}}$ は線分 AB を表すものとする．また直線 ℓ が点 A を通ることを, $\mathrm{A} \in \ell$, 通らないことを $\mathrm{A} \notin \ell$ などと書く．直線 ℓ, m が交わらないことを $\ell \cap m = \emptyset$ と書く．



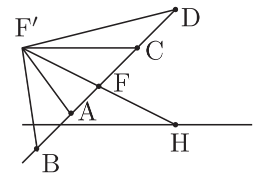
(証明) $\mathrm{I_3}$ から $\mathrm{E} \in \ell$ と $\mathrm{F} \notin \ell$ が存在する．$\mathrm{I_1}$ により点 E, F を直線で結ぶと, $\mathrm{II_2}$ から $\mathrm{G} \in \mathrm{FE}$ で 点 E が点 F, G の間にあるものがとれる．

$$\Omega_1 = \{\mathrm{A}; \overline{\mathrm{AF}} \cap \ell = \emptyset\} \cup \{\mathrm{F}\},\ \Omega_2 = \{\mathrm{B}; \mathrm{B} \notin \Omega_1 \cup \ell\}$$

とする．$\mathrm{G} \in \Omega_2$ であるから $\Omega_2 \neq \emptyset$ である．

$\mathrm{C}, \mathrm{D} \in \Omega_1$ ならば $\overline{\mathrm{CD}} \cap \ell = \emptyset$ であることを示す．$\mathrm{C} = \mathrm{F}$ または $\mathrm{D} = \mathrm{F}$ の場合は明らかだから, C, D, F は異なる 3 点とする．C, D, F が一直線上にないとき, もし $\overline{\mathrm{CD}} \cap \ell \neq \emptyset$ ならば, $\mathrm{II_4}$ より $\overline{\mathrm{CF}} \cap \ell \neq \emptyset$ もしくは $\overline{\mathrm{DF}} \cap \ell \neq \emptyset$ となり矛盾する．

C, D, F が一直線上にあるときは, ($\mathrm{I_2}$ より) CF と ℓ の交点は高々一つだから, $\mathrm{I_3}$ より $\mathrm{H} \in \ell$ かつ $\mathrm{H} \notin \mathrm{CF}$ となる点 H が存在する[16]. $\mathrm{F}' \in \mathrm{HF}$ を F が H, F′ の間にあるようにとる ($\mathrm{II_2}$ より可能)．このとき $\overline{\mathrm{FF'}} \cap \ell = \emptyset$ である．



なぜなら $\mathrm{HF}(\supset \overline{\mathrm{FF'}})$ と ℓ の唯一の交点は H であるが, 取り方から, F, F′ の間に H はないからである ($\mathrm{II_3}$ による)．よって $\mathrm{F}' \in \Omega_1$．C, F, F′ は一直線上にない (もしあれば, H が CF と ℓ の交点となり矛盾) から, 既に示したことにより, $\overline{\mathrm{CF'}} \cap \ell = \emptyset$．同様に $\overline{\mathrm{DF'}} \cap \ell = \emptyset$．C, D, F′ は一直線上にないから, 先の議論を F を F′ に変えて行えば, $\overline{\mathrm{CD}} \cap \ell = \emptyset$ を得る．

$\mathrm{C}', \mathrm{D}' \in \Omega_2$ ならば $\overline{\mathrm{C'D'}} \cap \ell = \emptyset$ となることも同様に示すことができる (例えば C′, D′, F が一直線上にない場合, $\overline{\mathrm{C'F}} \cap \ell \neq \emptyset$, $\overline{\mathrm{D'F}} \cap \ell \neq \emptyset$ だから, $\mathrm{II_4}$ での一意性より $\overline{\mathrm{C'D'}} \cap \ell = \emptyset$)．最後に $\mathrm{A} \in \Omega_1$, $\mathrm{B} \in \Omega_2$ とすると $\overline{\mathrm{AB}} \cap \ell \neq \emptyset$ であることを示す．$\mathrm{A} = \mathrm{F}$ の場合は明らかだから, $\mathrm{A} \neq \mathrm{F}$ とする．Ω_2 の定め方から, $\mathrm{B} \notin \ell$, $\mathrm{B} \neq \mathrm{F}$, かつ $\overline{\mathrm{BF}} \cap \ell \neq \emptyset$. 他方, $\overline{\mathrm{AF}} \cap \ell = \emptyset$. したがって, A, B, F が一直線上にないときは $\mathrm{II_4}$ より $\overline{\mathrm{AB}} \cap \ell \neq \emptyset$ であることが分かる．一直線上にあるときは, 上と同様にして一直線上にない 3 点の議論に帰着させる．**(証明終)**

上の定理で定まる同じ (または, 異なる) 領域に属する 2 点を直線 ℓ の同じ側 (または, 別の側) にあるという．これで図と無関係に直線とその上にない点の位置関係を定めることが可能になる．また直線上で “点 A からみて点 B と同じ側, 反対側” などの概念を厳密に定めることができる．

公理群 III は合同の公理と呼ばれる．線分の “合同”, もしくは “相等” と呼ばれる無定義語が導入される ($\equiv$ で表す)．“**$\mathbf{III_1}$．線分** AB **に対して，与えられた直線上の与えられた点** A′ **の与えられた側に一意に**[17]**点** B′ **がとれて** $\mathrm{AB} \equiv \mathrm{A'B'}$ **とできる**”; “**$\mathbf{III_2}$．** $\equiv$ **が同値関係である**[18]”; “**$\mathbf{III_3}$．点** B **(点** B′**) が点** A, C **(点** A′, C′**) の間にあるとき，** $\mathrm{AB} \equiv \mathrm{A'B'}$, $\mathrm{BC} \equiv \mathrm{B'C'}$ **ならば** $\mathrm{AC} \equiv \mathrm{A'C'}$ **となること**”(線分の加法) などが要求される．線分に “長さ” が定まっているものとして, 長さが等しいことを合同関係とし, これらの公理を (若干強めて) まとめたものが (B1), (B2) である．

角を同じ始点を持つ (一直線上にない)2 つの半直線の組と定める (ここでいう角は, 我々の知る角度が 0° と 180° の間のものだけである)．角に対しても “合同”, もしくは

[14] [3] では一意性のみが公理であって, 存在は公理に入れずに後ほど証明しているが, ここでは簡単のため公理に入れる．ヒルベルトは公理系を可能な限り簡略化するためにこのような書き方をするが, ここでは分かりやすさを優先した．他にも同様の書き換えを行う．

[15] [3] では一意性は公理に入れずに後で証明している．

[16] ℓ 上に 2 つ以上点があるから．

[17] [3] では一意性は公理に入れずに後で証明している．

[18] 反射律 ($x \equiv x$), 対称律 ($x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$), 推移律 ($x \equiv y$ かつ $y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$) を満たす二項関係 $\equiv$ を同値関係という．

“相等” と呼ばれる関係が導入される (同じ $\equiv$ で表すが, もちろん線分の合同とは一般には関係ない). 角の合同に対しても, “**III_4. 与えられた半直線を一辺とし, この直線に対して与えられた側に角を合同にただ一通りに移せる; 角の合同が同値関係になる**[19]” ことを要求する. 角度という量が定義されているという前提で, 角度が等しいことを合同関係として (後の定理 (H15) の結果を含めて) まとめたものが我々の (B3), (B4) である.

なお, 線分や角を合同に移すことは, 『原論』では定規 (公準 I.1, I.2) とコンパス (公準 I.3) を用いた作図により示された命題であった (命題 I.2, I.3, I.23). 議論の不備[20]を補うためにヒルベルトは, 合同に移せること自体を公理にしたわけである.

さて,『原論』における SAS の証明の不備を補うため, ヒルベルトはこの定理を少し弱めたものを公理としている: “**III_5. 二つの三角形 ABC および A′B′C′ において AB $\equiv$ A′B′, AC $\equiv$ A′C′, $\angle$BAC $\equiv$ $\angle$B′A′C′ が成り立てば, $\angle$ABC $\equiv$ $\angle$A′B′C′, $\angle$ACB $\equiv$ $\angle$A′C′B′ が成り立つ**[21].” これまで線分の合同と角の合同は全く無関係な概念であった. この公理はその二つの合同関係の関連性を規定したことになる. なお, ヒルベルトの三角形の合同の定義は, “3 辺, 3 角がそれぞれ合同となること” である.

さて, ここでヒルベルトが示す定理のいくつかを抜粋しよう. “定理” を “H” として [3] の番号をそのまま付す. また, 例えば I.2 は『原論』の命題 I.2 の意味である:

H11 =(J7)=I.5. **二等辺三角形の 2 角は等しい.**

H12 =(E2)=I.4. **SAS.**

H13 =(E3)=I.26. **ASA.**

H14 角が合同なら, 補角も合同. (I.13=(D3) と関連).

H =(J1)=I.15. 対頂角の合同定理 (番号なしで言及).

H =(D2). **直角の存在定理** (番号なしで言及; I.11 とも関係).

H15 合同な角と別の合同な角の和 (差) は (角として意味を持つ限り) 合同.

H17 =(J6). ((D1)=I.9 とも関連).

H18 =(E1)=I.8. **SSS.**

H21 全ての直角はたがいに合同である.

H22 =I.16. 外角の定理.

H24 =(J8)=I.6. 2 角の等しい三角形は二等辺三角形.

『原論』においては公準であった H21 が証明されていることに注意.

外角の定理 (H22) より直線 ℓ, m が直線 n となす**同位角が等しければ**, 直線 ℓ, m は**平行**である事が分かる ((J3)=I.28 に対応). さらに対頂角の合同定理を用いると (C2)=I.27 が得られる. このことを利用すると, I.31=(D4) が以下のようにして分かる: 直線 ℓ 上に 2 点 B, C が存在する (I_3 より). (I_1 により存在が保証される) 直線 AB に関して点 C の反対側に $\angle$ABC $\equiv$ $\angle$BAE となるような半直線 AE が取れる (III_4 より). 先に示したことから直線 AE は, 直線 ℓ と平行である.

公理群 IV は平行の公準と呼ばれる. ここで仮定される公理は次のプレイフェアの公理[22] と呼ばれるもののみである: “**IV. 直線 ℓ と, ℓ 上にない点 A に対して, 点 A を通る ℓ に平行な直線は高々一本しか存在しない.**” これは『原論』の平行線公準 I.5 と同値である事が分かる. 公理群 I〜IV の成立を仮定すると, 以下のことが示される.

H30 =(C1)=I.29 (および (J2)). **平行ならば, 同位角と錯角がそれぞれ合同である** (およびその逆).

H31 =(J4)=I.32. **三角形の内角の和は 2 直角である.**

さらに点 M があるとき, 線分 MA が互いに合同になるような点 A の集合を円と定義すれば (M は円の中心), 例えば円周角の定理などが示されることがわかる.

最後の公理群 V は連続の公理と呼ばれている. “**V_1 (アルキメデスの公理). 線分 CD が与えられたとき, 直線 AB 上に有限個の点 $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ が取れて, $\mathrm{A}_{j-1}\mathrm{A}_j \equiv \mathrm{CD}$ ($j = 1, \ldots, n$) (ただし $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$ とする), かつ B が A, A_n の間にあるように出来る**”; “**V_2 (一次元の完全性公理). 公理群 I, II, 公理 III_1, V_1 を保つ限りは, 一直線上にある点はこれ以上拡大不可能な点の集まりをなす.**” 公理 V_2 は実数の完備性と関連した公理である. 公理 V_1 は『原論』の V 巻において比例論を展開する際に暗に仮定されていた性質で, ユークリッドの論法に従った相似の理論展開のためには必要である. しかしヒルベルトは [3] の第 3 章において線分算 (幾何学的に構成した線分の和と差) の理論を公理群 I–IV のみを仮定して展開し, これにより (面積の理論を一切用いずに[23]) 比例の理論や三角形の相似条件などを再構築している. なお, [3] では, 三角形の相似は “対応する角がそれぞれ合同であること” と定義し, “a, a' と b, b' を 2 つの相似三角形の対応辺とすると $a : b = a' : b'$ が成立する” ことを示している (定理 41; (E6)=VI.4 に対応). また (J14), (J15) とその逆

[19] ただし [3] では同値関係の一部のみを仮定し残りは証明している.

[20] 例えば I.23 は重ねあわせにより示された SSS が根拠である.

[21] [3] では $\angle$ABC $\equiv$ $\angle$A′B′C′ のみが結論であるが, 点の役割を入れ替えればもう一方も容易に得られる.

[22] プレイフェア (John Playfair) は 18 世紀の数学者の名前である. [3] ではこの公理をユークリッドの公理と呼んでいる.

[23] アルキメデスの公理と面積の理論を用いずに比例の理論を構成する点が [3] の理論が [2] とは大きく異なる点である.

に対応する結果が定理 42 で示され, これを基に残る三角形の相似定理が示される. 第 4 章において, やはり公理群 I–IV のみを仮定して面積の理論を展開しており, 例えば我々の (F1), (F2) の成立を示すことが出来る. この理論から例えば三平方の定理が簡単に得られる. このように理論の構築法を変更すれば, 公理群 I–IV のみで『原論』の平面幾何に関するほぼ全ての定理を示すことが出来る. しかし公理群 I–IV のみでは, 2 円の交点の存在は保証できない. そこで次の公理の導入も考えられる ([4]): "(e) 2 つの円 O, O' で, もし O' が O の内部の点も外部の点も含むならば, 円 O, O' は交点を持つ." 公理群 I–IV と (e) を仮定すれば, 平面幾何に関する『原論』の理論は全て再構築できる. なお, 公理群 V を仮定すれば (e) が従うことも分かる.

5　いくつかの考察

5.1　解析幾何学 (デカルト幾何学) との関係

一般に順序体[24] F が与えられたとき, F^2 に通常の $\mathbb{R}^2$ における解析幾何学 (デカルト幾何学) と同様に点, 直線, 間などの概念を定めたものを F 上のデカルト平面と呼ぶ. また, 任意の $a \in F$ に対して $b^2 = 1 + a^2$ となるような $b \in F$ が存在するような順序体をピタゴラス的順序体 (以下, P 順序体) という ([4]). P 順序体 F 上のデカルト平面はヒルベルトの公理群 I–IV を満たす. 逆にヒルベルトの公理群 I–IV を満たす "平面" があったとすると, P 順序体 F が (同型を除いて一意に) 存在して, 考えている平面は F 上のデカルト平面と同型になることが示されている ([3], [4]). さらに公理 V_1 を仮定すれば, F は $\mathbb{R}$ の部分体と同型になり, 公理 V_2 も仮定すれば F は $\mathbb{R}$ と同型になる. つまり上記の公理群 I–V の全てを満たす平面は, 本質的には $\mathbb{R}^2$ 上のデカルト平面 (いわゆる $\mathbb{R}^2$) しかないことが分かる (このとき, 公理 (e) も成り立つ). 一方, 順序体 K を有理数に四則演算と演算 $x > 0 \mapsto \sqrt{x}$ を有限回行って得られる実数の集まりとして構成すると, K 上のデカルト平面は公理群 I–IV と公理 V_1 と (e) を満たすが, V_2 は満たさないことが分かる ([4]). したがって, 公理群 I–IV と公理 (e) が成り立てばユークリッド幾何学の理論が展開できることに注意すると, "$\mathbb{R}^2$ においてユークリッド幾何学が成り立つ" というのは正しいが, 逆の主張は正しくない. 特にユークリッド幾何学の成り立つ平面における直線を "直観的直線" と呼ぶならば, 数直線の考え方の基礎となる "実数全体を直観的直線とみなしうる" というのは (そういう幾何学が構成できるという意味で) 正しいが, 高校までの数学教育で持つかもしれない "直観的直線の各点に実数全体を 1 対 1 に対応させることが出来て数直線が作れる" という印象は厳密には正しくないことが分かる.

5.2　平行線公準 (公理) について

ヒルベルトの公理群 I–III を仮定する. このとき, ユークリッドの公準 I.5(平行線公準) とヒルベルトの公理 IV と (C1) と (J1) の 4 つは互いに同値であることが示される. また, ヒルベルトの公理群 I–V は互いに独立であることが示せる ([3]). つまり公理 IV を除く全ての公理を仮定しても公理 IV は証明できない.

ユークリッドの公準の中で公準 I.5 は主張が他と比べて複雑で自明な主張とは思えないことから, 長年にわたって実は証明できる定理ではないか, あるいはより単純な公準で置き換えられるのではないか, と研究されてきた. ユークリッドも可能な限り『原論』の証明中で公準 I.5 は用いないようにしている (初めて用いられるのは命題 I.29(=(C1)) の証明においてである). 歴史的には 19 世紀になって, ガウス, ボーヤイ, ロバチェフスキーらによって独立に, 平行線公準が成立しない幾何モデル (非ユークリッド幾何学) が発見された[25]. これにより平行線公準は他の公理から示される定理ではないことが分かった. したがって (C1) (あるいは (J2)) を論証抜きに認めるのは教育的配慮によるものではない. 他方, その逆である (C2)=I.27 (あるいは (J3)=I.28) は『原論』において平行線公準を仮定せずに (より正確には『幾何学基礎論』において公理群 I–III を仮定すれば) 証明できる定理である.

5.3　合同定理について

すでに紹介したようにユークリッドは "重ね合わせ" の方法で SAS を "示した." 他方, ヒルベルトは弱い形の SAS を公理 III_5 として採用した. 公理 III_5 と, それ以外の公理群 I–V の公理は独立である ([3]). したがって, この公理, もしくはその代替物がどうしても必要となる. 公理群 I–III を用いて SAS が示されており (H12), 逆に SAS から III_5 の主張は当然従うから, ヒルベルトは SAS 自身を公理として採用したといってもよい. 公理群 I–IV から公理 III_5 を除いたものを仮定すると, SAS が成立することと, ある種の等長移動 (直観的には平行移動, 回転移動, 対称移動) が存在することが同値になる ([4]). したがって, このような等長移動が存在することを公理としてもよい. ユークリッドの "重ね合わせ" はこのような等長移動の存在を公理とすれば正当化できる.

さてここで視点を変えて, 三角形の合同定理と, "二等

[24] 分配則や結合則などが成り立つような四則演算を持ち, さらに (全) 順序関係 (大小関係) があって, (1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, (2) $a > 0, b < c \Rightarrow ab < ac$ が成立するものを順序体という. 有理数体 $\mathbb{Q}$ や 実数体 $\mathbb{R}$ が代表的なものである.

[25] 一方, このモデルはヒルベルトの公理群 I–III, V は満たす. これが公理 IV が他の公理群から独立であることの証明でもある.

辺三角形の 2 角が等しいこと (J7)” の論証順序とその証明を比較してみよう. いずれの場合も (J6)(もしくはその一般化) を推論の鎖に含んでいる. 簡単のため公理 (e) の成立を以下では仮定する. このとき (J6) より (D1) (角の二等分線の存在) が従う. 中学校数学の教科書 (以下 **(J)**) では ((D1) は公理ではなく, (J6) より示されるとの立場に立つと) 以下のように論証されている ([ ] 内は根拠):

(J) 公理 (SSS, SAS, ASA) $\to$ (J6) [SSS] $\to$ (D1) [(J6)] $\to$ (J7) [SAS, (D1)].

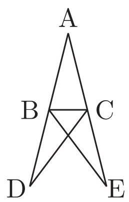
『原論』(以下 **(E)**) では以下のように進んでいく:

(E) SAS(=I.4) $\to$ (J7)(=I.5) [SAS] $\to$ SSS(=I.8) [(J7)] $\to$ (J6)-(D1)(=I.9) [SSS] $\to$ ASA(=I.26) [SAS].

『幾何学基礎論』(以下 **(H)**) では次のように進む:

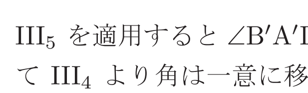
(H) (J7) [III_5] $\to$ SAS [III_5] $\to$ ASA [III_5] $\to$ (J6) [III_5, (J7)] $\to$ SSS [SAS, (J6)].

(J7)(=I.5) の証明は (E) では以下の様に行われる (辺, 角, 三角形の合同 (相等) は全て $\equiv$ で書く):



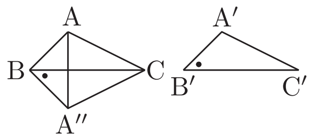
“AB $\equiv$ AC とする. 直線 AB, AC 上に BD $\equiv$ CE となる点 D, E をとる. AB $\equiv$ AC, AE $\equiv$ AD, $\angle$EAB $\equiv$ $\angle$DAC より SAS から $\triangle$ABE $\equiv$ $\triangle$ACD. よって, $\angle$CEB $\equiv$ $\angle$BDC かつ BE $\equiv$ CD. CE $\equiv$ BD より SAS から $\triangle$CBE $\equiv$ $\triangle$BCD. 特に $\angle$DBC $\equiv$ $\angle$ECB. また $\angle$ABE $\equiv$ $\angle$ACD, $\angle$CBE $\equiv$ $\angle$BCD より $\angle$ABC $\equiv$ $\angle$ACB.” **(H)** ではよりシンプルに示されている:“AB $\equiv$ AC, AC $\equiv$ AB, $\angle$BAC $\equiv$ $\angle$CAB より公理 III_5 から ($\mathrm{A}' = \mathrm{A}$, $\mathrm{B}' = \mathrm{C}$, $\mathrm{C}' = \mathrm{B}$ と読めば)$\angle$ABC $\equiv$ $\angle$ACB.”

(H) では SAS はこれを用いて証明される:“AB $\equiv$ A′B′, AC $\equiv$ A′C′, $\angle$BAC $\equiv$ $\angle$B′A′C′ とする. 公理 III_5 から残る 2 角も合同なので BC $\equiv$ B′C′ を示せばよい.



そうでないとせよ. 直線 B′C′ 上に B′D $\equiv$ BC なる点 D をとる. $\triangle$ABC, $\triangle$A′B′D に公理 III_5 を適用すると $\angle$B′A′D $\equiv$ $\angle$BAC($\equiv$ $\angle$B′A′C′). よって III_4 より角は一意に移るから, D = C′ となり矛盾.” **(H)** での ASA の証明もほぼ同様である ((E) においても本質的には同じ): “AB $\equiv$ A′B′, $\angle$ABC $\equiv$ $\angle$A′B′C′, $\angle$BAC $\equiv$ $\angle$B′A′C′ とする. BC $\equiv$ B′C′ を得れば SAS より証明が終わるので, そうではないとせよ. B′D $\equiv$ BC となる点 D をとると, 先と同様に SAS より $\angle$B′A′D $\equiv$ $\angle$B′A′C′ となり矛盾に到達する.”

(H) に従って (J6) を示す: “BA $\equiv$ BA″, CA $\equiv$ CA″ とすると, (J7) より $\angle$BAA″ $\equiv$ $\angle$BA″A, $\angle$CAA″ $\equiv$ $\angle$CA″A. よって $\angle$BAC $\equiv$ $\angle$BA″C なので, III_5 より $\angle$ABC $\equiv$ $\angle$A″BC となり (J6) を得る.”



SSS はこの系である: “直線 BC の A の反対側に $\angle$CBA″ $\equiv$ $\angle$C′B′A′, BA″ $\equiv$ B′A′ となる点 A″ をとる. SAS より $\triangle$A′B′C′ $\equiv$ $\triangle$A″BC. 特に (CA $\equiv$)C′A′ $\equiv$ CA″. C (または B) が AA″ 上にあるときは容易. そうでないときは (J6) より $\angle$ABC $\equiv$ $\angle$A″BC. よって SAS より $\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$A″BC($\equiv$ $\triangle$A′B′C′).”

(E) での (J6)-(D1) の証明は **(J)** と本質的に同様なので略する. **(E)** での SSS の証明は 3 節で紹介した命題 I.7((J7) より従う) と重ねあわせを用いたものである: “辺 BC と B′C′ を重ね, A < A′ が BC の同じ側に来るようにすると, 命題 I.7 より A と A′ は一致する.”

最後に論証についての注意をしておく. **(J)** での (J7) の証明は (D1), (J6) を通じて SSS を用いているから, (E) での (J7) の証明を **(J)** でのそれに置き換えると, SSS を示すのに SSS を用いたことになり循環論法になる. 同様に **(H)** での (J7) や (J6) の証明を **(J)** でのそれに置きかえても循環論法になる. このように, ある定理の証明が “正しい” かどうかは, それ単体ではなく理論全体を見渡さないと判断できない. **(J)** での (J6) や (J7) の論証が正しいのは, あくまで SSS と SAS の成立がそれらとは独立に事前に分かっているという前提での話である.

また, **(E)** では (面積の理論を用いて示される)VI.1 より VI.2(=(J16),(J17)) が示され, これから相似定理が示される. **(H)** においては, 先に相似定理 VI.4=(E6) が (線分算の性質より) 示され, これより (J14), (J15) に相当する結果が得られ, あとは **(E)** と同様に進む. **(J)** においては (J14)–(J17) の証明は, あくまで相似定理を前提としたものが与えられている[26].

参考文献

[1] 片山聡一郎, 田川裕之, 中学校数学の図形領域における初等幾何の指導内容と前提条件.

[2] ユークリッド, ユークリッド原論, 中村幸四郎・寺坂英孝・伊藤俊太郎・池田美恵訳, 共立出版, 1971 年.

[3] D. ヒルベルト, 幾何学基礎論, 中村幸四郎訳, ちくま学芸文庫, 筑摩書房, 2005 年.

[4] R. ハーツホーン, 幾何学 I 現代数学から見たユークリッド原論, 難波 誠 訳, シュプリンガー・ジャパン, 2007 年.

[26] ただし (J14) の証明は **(H)** と本質的に同じ.