小学校における面積指導の概観

An overview of teaching of area of plane figures in elementary schools

片山 聡一郎　田川 裕之　谷 有加
Soichiro KATAYAMA（和歌山大学教育学部数学教室）
Hiroyuki TAGAWA（和歌山大学教育学部数学教室）
Yuka TANI（和歌山大学大学院教育学研究科）

2012年10月５日受理

本稿では, 小学校における面積指導を概観し, 面積とはどういったものかを再認識し, 数学的に厳密に面積をとらえる方法について概説する.

1　序

「面積とは何か」と問われたときに小・中学校の先生や子どもたちは何と答えるだろうか. おそらく“広さ”と答えるのではないだろうか. しかし「広さとは何か」と続けて問われるとどうであろうか. “広さ”という言葉も厳密に定義された概念ではないから, このように突き詰め続ければいずれ沈黙が訪れるだろう. 子どもたちにどのような理解を求めるのかは別として, 教える立場にある教師が面積という概念を厳密に理解しておくことは重要である.

子どもたちの面積に対する認識を調査した文献として, 本宮テイ [7] と渡辺昭 [10] があげられる.

本宮は, 「量と測定」の領域における試験を小学校高学年の子どもたちに実施し, 広さについての量感をどのようにとらえているのかについて究明している. その結果, 『子どもたちは, 広さを長さからの考え方でもってこようとする傾向が強い』と述べている. さらに『広さは単位面積がしきつめられてできている』という考え方を子どもたちに養う必要があるとし, 指導例を挙げている.

渡辺は, 小学校の全学年の子どもたちを対象に, 面積についての試験を実施し, 分析した結果として, 『公式が理解されていても, 問題解決できない児童が目立った』と述べている. さらに, 図形の用語や公式の意味の理解不足が問題であると指摘し, 求積 (=面積を求めること) の素地を培う教材教具の工夫や, 量感を育てるための指導方法についても言及している.

このように, 子どもたちの面積の考え方につまずきがあることはすでに報告されており, 教師がそのつまずきに対してどのように対処, 指導していくかについての指導法も例示されている. 優れた指導を行うためには, 教師自身が面積の性質や意味についてよく理解し, その本質を伝えることが必要不可欠である.

本稿では, 小学校における面積指導を概観し, 面積に関連した内容を指導する際に, 教師自身が認識しておけばよいと思われる面積の性質について述べる.

2　小中高を通した面積の指導過程

まず, 小学校, 中学校, 高等学校では面積について現在どのように学んでいるのかを知るために, 小中高の学習指導要領解説 [1], [2], [3] に掲載されている「算数科 (数学科) の内容の構成」から, “面積”といった言葉が利用されている部分を抜粋し, 整理したものが表１である.

	単元・科目	学年	単元名	内容
小学校	量と測定	1	量の大きさの比較	長さ, 面積, 体積の大きさの比較
		4	面積	面積の単位と測定
				正方形, 長方形の面積の求め方
		5	面積	三角形, 平行四辺形の面積の求め方
				ひし形, 台形の面積の求め方
		6	面積	円の面積の求め方
中学校	図形	1	空間図形	球の表面積・体積
		3	図形の相似	相似な図形の相似比と面積比及び体積の関係
高校	数学 II	-	微分積分の考え方	面積

表1: 学習指導要領解説における内容の構成より面積部分抜粋

小学校では, まず１年生において, 面積を比較するという活動を通して面積についての感覚を養い, ４年生から６年生にかけて, 具体的な面積の求め方について学習する. 中学校では, 立体における表面積や体積, 相似な図形の面積比などを学び, 高等学校においては, 関数のグラフで表されるような曲線図形の面積を定積分を用いて求める方法が指導される.

このように, 面積の求め方については, 小学校以降, 様々な図形に対して学習が行われている. しかし, 面積とはどのような量であるかについては, 中学校以降では全く触れられず, 既習の概念として扱われている. したがって, 面積という概念の形成に大きく関わるのは小学校段階の学習であると言ってよいであろう. そこで, 次に, 小学校での面積の学習内容に焦点をあて, 指導の際に面積とはどのような量として扱われているのかを整理していく.

3　小学校における面積の様相

本節では, 小学校学習指導要領解説算数編 [1] と教科書での具体的指導例を比較検討しながら小学校における面積指導を概観しよう. 尚, 小学校の算数の教科書は, 啓林館, 日本文教出版, 東京書籍, 大日本図書, 学校図書, 教育出版の計 6 社で出版されているが, 本稿では, 和歌山県内において多く利用されている啓林館の教科書 [4] を検討対象とする. 啓林館の ‘平成 23 年度教科書カリキュラム作成資料 わくわく算数 1〜6 年’ [5] において “面積” を検索して整理した表が次の表 2 である.

学年	大単元	指導内容【用語・記号】
1	大きさくらべ (2)	・広さの直接比較, 間接比較による測定
		・広さの任意単位による測定
		・何時何分の時刻を読むこと, 表すこと【○時○分】
4	面積	・面積の概念と普遍単位による測定【面積】
		・面積の単位【cm^2, m^2, km^2, a, ha】
		・長方形, 正方形の面積の求め方と公式, その活用
		・$1m^2$ の量感
5	小数×小数	・小数をかけることの意味と立式
		・小数をかける計算と筆算の仕方
		・乗数と積の大小関係
		・辺の長さが小数値の場合の面積や体積の求積
		・小数倍の意味と適用
	面積	・直角三角形, 鋭角三角形の面積を求めること
		・三角形の面積公式【底辺, 高さ】
		・三角形分割による一般四角形の求積
		・高さがはみ出す三角形や平行四辺形の面積の求め方
		・台形, ひし形の求積と面積公式【上底, 下底】
		・三角形の求積公式を使っての関数的見方 (底辺と高さの関係)
		・面積公式に関する式のよみ
6	分数×分数	・分数をかけることの意味と計算の仕方
		・逆数の意味, 分数・整数・小数の逆数の求め方【逆数】
		・分数倍の意味と適用 (第 1, 第 2 用法)
		・いろいろな量を表す分数 (面積, 時間) と適用
		・積の大きさ
	円の面積	・円の面積の検討づけ
		・円の面積の求め方と公式
	およその形と大きさ	・図形の概形をとらえた, 面積や体積の概測

表 2: 小学校において面積指導が行われている単元

表 2 から, 表 1 での単元以外においても面積の学習と指導が実施されていることが読み取れる. 小学校学習指導要領解説算数編 [1] では, 領域「量と測定」における指導は, 量の大きさを表すために必要な整数, 小数, 分数, 求積の対象となる平面図形や立体図形の理解, さらに, 比例といった関数の考え方など多くの事柄と関連しているため『複数の領域の内容の関連に配慮することが大切である』と述べられている. したがって, 面積の学習においても, このことを踏まえた上で指導が行われていることが分かる. 以下, 表 2 での単元を具体的に検討する.

3.1　大きさくらべ (2)

小学校 1 年生の単元「大きさくらべ (1)」 では, “長さ比べ” を通して “長さ” を, 水を用いた “かさ比べ” を通して “かさ (容積)” を感覚的につかむことを目的としている. その後, 単元「大きさくらべ (2)」において, 量としての広さについて初めて触れる. この単元では, 広さ, 液体を用いないかさ (体積) などについて検討する場面が与えられている. まず, 広いとはどういうことなのかを理解するために, レジャーシートの広さを比較する方法が用いられている. 角をそろえて重ね合わせた 2 つの図形の比較を行うことにより “広さ” という概念を感覚的に理解させることが目的である. 言い換えると, 「ある図形を含む図形は含まれる図形よりも広い (面積が大きい)」という性質 (以下, 性質 (A) と呼ぶ) を面積の基本的な性質の一つと考えていることになる.

また, 5×5 のマス目を用意し, 2 人でじゃんけんをして勝った方が自分の色 (一方は青, もう一方は赤) でマス目ひとつを塗り, 最終的に『ぬったところのひろいほうがかち』という陣取りゲームを行っている. このゲームにより, 重ね合わせるのではなく, マス目ひとつの “広さ” を単位の大きさとして, マス目の個数を数えることにより “広さ” の比較をさせようとしている. マス目を単位として取れるということは, 同じ大きさのマス目はどこにあっても, 面積が変わらないという性質, 言い換えると「ある図形を平行移動しても面積は変わらない」という性質 (以下, 性質 (B1)) を面積という量は持つことになる. また含まれるマス目の個数を数えることにより, 面積が比べられるということは, 「図形の面積は, その図形を分割してできる個々の図形の面積の和である」という性質 (以下, 性質 (C) と呼ぶ) も持つと考えていることになる.

3.2　面積 (4 年生)

1 年生における「量と測定」の学習後, 特に面積についての指導が行われることはなく, 4 年生で広さという用語を改め, 面積という用語を学習することになる. ここでは, 教科書に記載されているいくつかの花壇の広さを比較するという課題が与えられ, 学習が始められる. 実際には,

直接比較することは困難であるため, 紙などに写し取るといった手段を用いた間接的な比較が行われている. 紙に写し取り平行移動を行うのみならず, 重なった部分を取り除き, 残りを回転させて, 再び重ねて比較するということを行っている. つまり 1 年生の学習で現れた性質 (A), (B1), (C) に加えて「回転させても面積は変わらない」(以下, 性質 (B2) と呼ぶ) という性質も面積は持つと考えていることになる.

さらに, 「しき石がいくつ入るかで比べましょう」という問いが与えられ, 問題を検討するためのヒントとして, 『広さも数で表せそうだな』という間接比較を促す文章が教科書では掲載されている. 子どもたち自身からこの発言が出てくることで, 単位の必要性や意味の理解が期待されていることに注意したい. 続けて, 方眼用紙にかかれた四角形において『どちらがどれだけ広いですか？』といった問いかけが行われている. 今までは広い図形を言えばよかったのであるが, ここではじめて, “どれだけ” 広いのかについての問いが現れ, 数値化する必然性が生み出されている. その後, 教科書において「面積」がはじめて次のように定義される.

『広さのことを**面積**といいます. 面積は, 1 辺が 1cm の正方形がいくつ分あるかで表します.』

これまで曖昧にとらえていた広さを「面積」として (数学的には厳密さに欠けるが) はじめて定義しているのである. ただし, これにより全ての図形に対して面積という量が定められたわけではないことは十分に認識しておくべきであろう. この定義により面積が定まったのは 1 辺が 1cm の正方形をいくつか合わせてできる図形に対してのみであり, 円はおろか, 三角形に対してすら一般にはこの定義は意味を持たない. また, この定義は 1 年生の陣取りゲームにおいて示唆されていたことにも注意しておこう (つまりこの定義の背景には性質 (B1) と (C) がある). その意味では, ここで特に定めたのは「1 辺が 1cm の正方形の面積は $1\mathrm{cm}^2$」ということのみと見ることもできるであろう.

その後, 方眼紙を用いることなく様々な図形の面積の公式の導出を目的とする学習が開始される. 例えば, 長方形, 正方形の面積の公式が次のように与えられている.

$$\begin{aligned} \text{長方形の面積} &= \text{縦} \times \text{横} \\ \text{正方形の面積} &= 1\,\text{辺} \times 1\,\text{辺} \end{aligned}$$

面積を $1\mathrm{cm}^2$ とした正方形が, 長方形や他の長さの正方形にいくつあるかを考察することにより, この公式を導いている. 面積の定義, および導出から, この時点では, 一辺の長さが自然数 (cm) の長方形と正方形に対してのみこれらの公式の有効性が保証されていることを認識しておくべきであろう.

続けて, m^2(平方メートル) の学習, 単位換算が行われている. 前述した本宮, 渡辺の指摘にあるように, 単位換算が子どもたちの一番のつまずきやすいところである. 長さの比較では単位長さが一次元で表されていたのに対して, 二つ以上の長さという構成要素を面積はもつために, 比較する基準がとらえにくくなることがつまずく原因の一つとなっているようである. 面積の新たな単位の導入は, 基本となる図形の変更ととらえることもできる. つまり, 1 辺が 1cm の正方形の面積を単位面積 1 として計っていた面積を, 1 辺が 1m の正方形の面積を単位面積 1 として計りなおしたと考えられる. この観点からは, cm^2 や m^2 などの面積を表す単位は, 「どのような大きさの正方形を面積 1 として計った面積か」を表す記号ととらえることができる. 先の面積の公式から 1 辺が 1m の正方形の面積は, $100 \times 100 = 10000$ (cm^2) であるから, これで元の面積 (cm^2) と新たな面積 (m^2) の換算が行われる. 以上のことから, 単に長方形の面積を「縦×横」と形式的に教えるのではなく, ある図形を面積の基本単位として選び, その個数を数えていると意識づける必要があるだろう. このような意識を持てば, 縦の長さが cm, 横の長さが m で表されている場合に長さの単位を揃える必要性を理解しやすくなると考えられる.

さらに, 少し変形された図形の面積をどのように求めるのかについての学習が行われている. 課題として与えられる図形は図 1 のようなものである. いくつかの四角形に分割することにより面積を求めたり, あるいは大きな四角形から小さな四角形を取り除いた図形として面積を求めたりする方法が指導される. ここではもちろん性質 (C) と (B1) が重要な役割を果たしている[1].

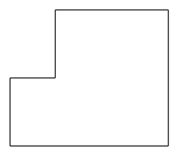

図 1: 変形された図形

最後に, cm^2 よりも大きな面積として km^2 (平方キロメートル) や a (アール), ha (ヘクタール) についての学習が行われる. 前述のように, これも面積を計るときの基本となる図形の変更だととらえればよい.

[1] 尚, 先の面積の定義が適用可能な図形を考える限りは, 性質 (C) は容易に証明できる.

3.3　面積 (5 年生)

4 年生の単元「面積」では四角形の面積の求め方と面積における単位について学習した. 5 年生の「小数 × 小数」の単元で, 1 辺の長さが (有限) 小数の場合の長方形の面積が導入される. 例えば短辺が 2.3cm, 長辺 が 3.4cm の長方形の面積は, 1 辺が 0.1cm の正方形 100 個で 1 辺が 1cm の正方形になることから, 1 辺が 0.1cm の正方形の面積は $0.01\mathrm{cm}^2$ となること, および先の長方形は, 1 辺が 0.1cm の正方形を $23 \times 34 = 782$ 個含むことから, その面積は $782 \times 0.01 = 7.82\mathrm{cm}^2$ となり結果として 2.3×3.4 で面積が求められることを示している (性質 (B1) と (C) を用いている).

5 年生の単元「面積」では三角形, 平行四辺形, 台形, ひし形の面積の求め方について学習する. 学習の順序としては, 「三角形の求積を学んだ後, 平行四辺形の求積を学習する」もしくは「平行四辺形の求積を学んだ後, 三角形の求積を学習する」という 2 つのパターンがある. どちらの順序で学習するかは教科書会社によって異なる. 啓林館では前者の方法がとられているため, 本稿では前者の方法についての検討を行う. はじめに, 直角三角形の求積が課題として与えられ, 図 2 を用いた考察が行われている.まず, 与えられた直角三角形と合同な直角三角形

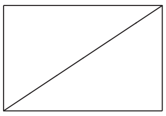

図2: 合同な 2 つの直角三角形

を準備し, 合同な直角三角形を回転させて斜辺を重ね合わせて長方形とし, 長方形の求積に帰着して直角三角形の求積の公式まで到達している. 尚, 合同の概念, 三角形の内角の和は 180°, 四角形の内角の和は 360° といったことは既習事項である. ここで, 4 年生のときに与えられた面積の定義を直接用いて, 1 辺の長さが 1 の正方形に分割することにより直角三角形の面積を求めることはできないことに注意が必要である. そのため, 面積の平行移動不変性と回転不変性 (性質 (B1), (B2)) および分割された図形と元の図形の面積の関係 (性質 (C)) を用いて長方形の面積に帰着することにより, 直角三角形の面積を間接的に求めているのである. つまり, 論理的には「各図形に対して性質 (B1), (B2), (C) を満たす面積という量がある」という大前提の下での推論である.

続けて, 直角三角形ではない三角形で, 高さとなる線分を三角形内部にもつ三角形の面積を検討している. 三角形内部にある高さの線分で三角形を分割することにより 2 つの直角三角形を作り出し, これら 2 つの直角三角形を回転させたり, 合同なものを用いたりして, 長方形に再度帰着して面積の求め方を考察している. これらを整理して, 三角形の面積の公式を次のように教科書に掲載している.

$$\text{三角形の面積} = \text{底辺} \times \text{高さ} \div 2$$

このときに初めて三角形の構成要素として「底辺」と「高さ」という言葉を学習することになる. さらに, 平行四辺形, 台形, ひし形の面積を, 三角形の面積に帰着させることにより求めている. ここでも性質 (B1), (B2), (C) が用いられている.

3.4　面積 (6 年生)

まず, 5 年生の場合と同様に, 単元「分数 × 分数」で長方形や正方形の面積の公式が 1 辺の長さが分数の場合に拡張される. この場合は正方形ではなく, 例えば辺の長さが $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{5}$ の長方形を基準とすることなどが用いられているが, 面積の性質としては性質 (B1), (C) が用いられていることは先と同様である.

今までの三角形, 四角形の面積の学習においては, どのように面積を求めるのかを考えることが学習の中心で, その求め方を体得することが学習の目的の 1 つでもあった. 円の面積の学習においては, 今までになかった「円の面積の見積もり」という活動が行われている. まず, ある円に内接する正方形と, 外接する正方形で面積を挟むことにより『円の面積は, 半径を 1 辺とする正方形の面積の 2 倍より大きく 4 倍より小さいことが分かります』と教科書で述べられている (性質 (A) を用いている). このことを学習した後で, 方眼用紙に書かれた円の面積を円の内側に存在する方眼の面積として近似的に求め, 『円の面積は, 半径を 1 辺とする正方形の約 3.1 倍になりそうです』という結論を導いている[2].

さらに, 円を細かい扇形に分割していき, 長方形の面積を利用して円の面積をより厳密に求めようとしている. まず性質 (B1), (B2), (C) を用いて扇形への分割, 回転, 組み直しを行っている. そして扇形を細かくしていくと, 最終的には, この組み直したものが長辺が円周の半分, 短辺が半径の長方形に近づくとして, 円の面積の公式を導いている (尚, 円周率 3.14 として, 円周は既習事項である).

三角形に分割して面積を求めることができない図形の

[2]尚, 円に一部のみが含まれる方眼は $0.5\ \mathrm{cm}^2$ として数えさせているが, この操作にあまり数学的根拠はなく, 単に平均を取った以上の意味はないと思われる.

存在を認識することは大切ではある. 円の面積を求めることは, その第一歩と考えられる. その指導過程は, 円の面積の見積もりから始まり, 円を組み直した図形から長方形への極限移行を通して求めることとなっている. この極限移行を正当化するには, 性質 (A) を用いたはさみうちの議論に加えて円周 (曲線の長さ) の定義の厳密化も必要となる. このような難しさを含む円の求積は, 数学的に厳密性を欠いた指導とならざるを得ないので, 小学校における面積の指導において, 単元「円の面積」は, 最も注意すべき単元の一つと考えてよいだろう.

3.5 “面積” に対して要求される性質

これまでのことをまとめると, 小学校の段階での “面積” に関する推論で用いられている性質としては次の 4 つがあげられる (後の都合で順序を変えた. 以下ではこの番号で引用する).

(I) 1 辺が 1 の正方形の面積は 1 である.

(II) ある図形を 2 つ, またはそれ以上に分割したとき, 分割された図形の面積を足し合わせると, もとの図形の面積と変わらない.

(III) 移動（平行移動, 回転, 裏返し) しても面積は変わらない.

(IV) 与えられた 2 つの図形に対して, ある図形を含む図形は含まれる図形よりも面積が大きい.

尚, 図形を 2 つに分割したとき, 分割線はどちらに属するのかなど, 曖昧な部分があるが, それについては後ほど正確に述べる. また, (III) の裏返しに関する不変性は, 教科書には明確には現れないが, これも “大きさと形を変えない変換”(より正確には合同変換) であるから含めておいた.

逆にこれ以外の性質は用いられていないから, 面積とは図形に対して定義された上の 4 つの性質を満たす量であるといってもよい.

上の (I)〜(IV) を満たす面積があったとき, (I) を例えば「1 辺が 1 の正方形の面積は a である」(ただし $a > 0$ とする) に置き換え, (II)〜(IV) をそのまま満たすような面積は, 元の面積を a 倍すれば得られる. また (I) を例えば「1 辺が b の正方形の面積は 1 である」(ただし $b > 0$ とする) に置き換えたものは, 元の面積を $1/b^2$ 倍すれば得られる. このように (I) は基準となる大きさを決める以上の意味はないとも言える. これは面積を表す単位の選び方に自由度があることに対応している.

数学的には, 本当に上で述べたような性質をもつ量が定義できるかどうかという問題がある. 面積や体積 (あるいは確率) というような概念を抽象化した測度という数学的概念が 19 世紀末から 20 世紀初頭に形成された. この測度論により上の問いには満足のいく解答を与えることができる. 次節で測度について概説する.

4 測度

本節では, 前節までの “面積” の満たすべき性質を測度論の言葉で書き直してみる. 尚, 本節の内容は [6], [8], [9] などを参考にした. まず面積が定められる “図形” の集合を記述する言葉を抽象的な枠組みで用意する.

定義 4.1 (σ-加法族)**.** 集合 Ω の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が σ-加法族であるとは次の性質を満たすことをいう:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$.

(iii) $A_k \in \mathcal{F}$ $(k \in \mathbb{N})$ ならば $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

ここで (iii) を次の性質に置き換えたものが成立するとき, $\mathcal{F}$ を有限加法族という:

(iii$'$) $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ ならば $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$.

ただし A^{c} は A の (Ω を全体集合としての) 補集合を表す.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{\mathrm{c}} \right)^{\mathrm{c}}$$

に注意すると, $A_k \in \mathcal{F}$ $(k \in \mathbb{N})$ ならば $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$ も分かる. また, $\emptyset$ で空集合を表すと, $\emptyset = \Omega^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$ である.

(iii) で $A_k = \emptyset$ $(k \geq 3)$ とおけば, (iii$'$) が得られるから, σ-加法族は有限加法族である. 逆は一般には正しくない[3].

例えば, 平面全体の “面積” を考えると, それは有限の値ではないであろう. その意味で “面積” に ∞ の値も許しておくと便利である[4]. “面積” を記述する言葉をやはり抽象的な枠組みで用意しておく.

[3]尚, (iii$'$) を帰納的に適用すると, 次のことの成立は容易にわかる:

(iii$''$) K を自然数とする. $A_1, A_2, \ldots, A_K \in \mathcal{F}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{K} A_k \in \mathcal{F}$.

[4]任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $a < \infty$ とする. また $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に対して $a + \infty = \infty + a := \infty$ と定める. また $a > 0$ に対しては $a \cdot \infty = \infty \cdot a := \infty$ とし, $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ としておく. ただし ∞ による割り算や引き算は考えない.

定義 4.2 (測度)**.** Ω を集合, Ω の部分集合の族 $\mathcal{F}$ を σ-加法族とする．写像 $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty)\cup\{\infty\}$ が $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の測度であるとは, 次の性質を満たすことをいう:

(1) $\mu(\emptyset)=0$.

(2) $A_k\in\mathcal{F}$ $(k\in\mathbb{N})$ が互いに素である, すなわち $j\neq k$ ならば $A_j\cap A_k=\emptyset$ であるとき,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

$\mathcal{F}$ が有限加法族であって, 上記 (1) および, 次の $(2')$ が成り立つとき, 写像 $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty)\cup\{\infty\}$ を有限加法的測度 (あるいはジョルダン測度) と呼ぶ:

$(2')$ $A_1,A_2\in\mathcal{F}$ が互いに素であるとき,

$$\mu(A_1\cup A_2)=\mu(A_1)+\mu(A_2).$$

μ が $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の測度であれば, 有限加法的測度であることは容易にわかるであろう．

命題 4.3. μ が $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の測度 (あるいは有限加法的測度) とする． $A,B\in\mathcal{F}$ に対して $A\subset B$ ならば $\mu(A)\le\mu(B)$ が成立する．

実際, $B=A\cup(A^{\mathrm{c}}\cap B)$ および $A\cap(A^{\mathrm{c}}\cap B)=\emptyset$ であるから $\mu(B)=\mu(A)+\mu(A^{\mathrm{c}}\cap B)\ge\mu(A)$ が成立する．

命題 4.4. $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty)\cup\{\infty\}$ が (2) と

$(1')$ $\mu(A)<\infty$ となる $A\in\mathcal{F}$ が存在する

を満たせば μ は $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の測度となる．逆も成立する．
同様のことが有限加法的測度に対しても成立する．

実際, $p=\mu(\emptyset)$ とおき, (2) を $A_1=A$, $A_k=\emptyset$ $(k\ge2)$ として適用すると

$$\mu(A)+\sum_{k=2}^{\infty}p=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\mu(A)<\infty$$

より, $p=0$ である (同様に $(2')$ を用いると $\mu(A)+p=\mu(A)+\mu(\emptyset)=\mu(A\cup\emptyset)=\mu(A)<\infty$ より, $p=0$ を得る)．よって (1) が成立する．逆に (1) が成り立てば $A=\emptyset$ として $(1')$ が成立する．

平面を $\mathbb{R}^2$ とみなし, (曖昧な表現ではあるが)“図形” の集まりを $\mathcal{F}$ と書いたとしよう (“図形” は $\mathbb{R}^2$ の部分集合と考えている)．ある図形の外部をまた “図形” と考えることや, “図形” をあわせたものも, また “図形” とみなすことは自然であるから, “図形” の集まり $\mathcal{F}$ は有限加法族であると考えてよいだろう．そこで $A\in\mathcal{F}$ の面積を $\mu(A)$ で表すと前節に挙げた面積の性質とは次のようにいうことができる:

$(1'')$ $\mu\big([0,1]\times[0,1]\big)=1$ が成立.

$(2'')$ A_1 と A_2 に対して $A_1\cap A_2$ が空もしくは有限個の線分の組み合わせでかけるならば[5], $\mu(A_1\cup A_2)=\mu(A_1)+\mu(A_2)$.

(3) O を $\mathbb{R}^2$ の合同変換[6]とするとき, $A\in\mathcal{F}$ ならば $O(A)\in\mathcal{F}$ であって, $\mu\big(O(A)\big)=\mu(A)$.

(4) $A\subset B$ ならば, $\mu(A)\le\mu(B)$.

$(1'')$ は $(1')$ の特別な場合であり, $(2'')$ から $(2')$ が従うから, 命題 4.4 より μ は有限加法的測度である．したがって命題 4.3 より (4) は自動的に成立することがわかる．以上から本質的な性質は $(1'')$, $(2'')$, (3) である．このような性質を満たす “面積” の存在は小学校以降高校に至るまで直観的に認めていたのだが, 実際に数学的に存在を証明することができる．まず $\mathbb{R}^2$ における最も基本的な測度であるルベーグ測度の構成法を (証明抜きに) 概観しておこう．

I が $\mathbb{R}$ の区間であるとは $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ のいずれかで書けることをいう ($a=-\infty$ や $b=\infty$ も許す)．ここで $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$, $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\le b\}$ などである． $|[a,b]|=|(a,b)|=|(a,b]|=|[a,b)|:=b-a$ とおく[7].

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が基本図形であるとは, $I_1\times J_1,\dots,I_K\times J_K$ が互いに素になるような有限個の区間 $I_1,\dots,I_K$ と $J_1,\dots,J_K$ がとれて

$$A=\bigcup_{k=1}^{K}(I_k\times J_k)$$

と書けることをいう．このとき

$$m(A):=\sum_{k=1}^{K}|I_k|\,|J_k|$$

とおく．A の表し方は 1 通りとは限らないが, $m(A)$ は表し方によらずに定まることを示すことができる．基本図

---

[5] 実際には連続曲線の組合せでよいが, 小学校の教科書で現れるのは線分のみであるから, 簡単のためこのようにした.

[6] O が $\mathbb{R}^2$ の合同変換であるとは, O が長さを変えない (つまり $|O(\boldsymbol{x})|=|\boldsymbol{x}|$ が $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ に対して成り立つ) 線形変換であることを意味する. $\mathbb{R}^2$ における合同変換は, 平行移動, 鏡映移動, 回転移動の合成で書けることも知られている.

[7] $a=-\infty$ または $b=\infty$ のときは, $b-a=\infty$ とみなす.

形全体の族を $\mathcal{E}$ とおくと, $\mathcal{E}$ は有限加法族となる. また, m は $(\mathbb{R}^2, \mathcal{E})$ 上の有限加法的測度となる. 直観的には, 区間 I, J に対して $I \times J$ は長方形[8]を表し, $|I||J|$ はその面積である. そして基本図形とは有限個の長方形を重ならないように組み合わせてできる図形であり, その面積を '構成する長方形の面積の和' と定義したことになる.

一般に $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して

$$m^*(A) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \,\middle|\, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,\ B_k \in \mathcal{E}\right\}$$

と定め[9], これを A のルベーグ外測度と呼ぶ. 直観的には, A を覆うような基本図形の族の面積の和のなかで最も小さいものを求めていることになる. 円の面積を求める方法の一つとして, さまざまな大きさのマス目を持つ方眼紙に円を書いて, 円を含むマス目の数を数えることとの類似性が見てとれるであろう. ただしここではマス目の大きさは様々なものが混在してよいし, 個数も無限にあってもよいところが違う点である.

A_k を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とすると

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$$

となることを示すことはできるが, 不等号を等号に置き換えたものは A_k が互いに素であっても一般には正しくない. しかし, $k \in \mathbb{N}$ に対して A_k が互いに素な開集合 (つまり直観的にいえば境界を含まない集合) のとき,

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$$

が成立する[10]. そこで次のような部分集合族を導入する: $A \subset \mathbb{R}^2$ がルベーグ可測集合であるとは, どのような正の数 ε が与えられても, A を含む開集合 U がとれて $m^*(U \cap A^c) < \varepsilon$ となることをいう. 直観的にはルベーグ可測集合とは, 外測度がいくらでも近い開集合がとれるような集合である. ルベーグ可測集合の全体を $\mathcal{L}$ と書くと, $\mathcal{L}$ は σ-加法族となり, $A \in \mathcal{L}$ に対して $\mu(A) := m^*(A)$ とおくと, μ は $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L})$ 上の測度となる. この測度をルベーグ測度と呼ぶ.

ルベーグ測度が我々の求める面積の性質をもつことを示す前に少し注意を述べる. 選択公理の下では, $\mathbb{R}^2$ の部分集合でルベーグ可側集合ではないものが存在する. したがってルベーグ測度の定まらない集合が存在する. しかし, たとえば開集合や閉集合は全てルベーグ可測集合であることが分かり, 通常 "図形" として想定するようなものは全てルベーグ可測集合であると考えてもよい.

まず基本図形の測度の定め方から, $(1'')$ が成立することが分かる. また外測度の定義より, 線分の測度は 0 となることが分かる[11]. したがって, 有限個の線分からなる集合の測度も 0 である. 以上に注意すると $(2'')$ の成立も示すことができる. 実際, $A_1 \cap A_2$ が有限個の線分でかけるならば, 今示したことから $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$ である. よって $\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_2^c) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1 \cap A_2^c)$ となる. 同様に $\mu(A_2) = \mu(A_2 \cap A_1^c)$ である. $A_1 \cap A_2^c$, $A_2 \cap A_1^c$, $A_1 \cap A_2$ は互いに素であり, これらの和集合は $A_1 \cup A_2$ である. したがって

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup A_2) =& \mu(A_1 \cap A_2^c) + \mu(A_2 \cap A_1^c) \\ &+ \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)\end{aligned}$$

となり, $(2'')$ が示された. 基本図形の平行移動, 鏡映移動は基本図形となり, 測度も不変であることが分かるから, $A \in \mathcal{L}$ の平行移動, 鏡映移動はルベーグ可測集合であって測度が不変である事は容易に得られる. 回転移動 O に関しては, 基本図形を回転させたものは一般には基本図形ではないが, $E_k \in \mathcal{E}$ $(k \in \mathbb{N})$ が与えられたとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $F_k \in \mathcal{E}$ がとれて,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} O(E_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} m(F_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) + \varepsilon$$

とできることを用いれば[12], $O(A) \in \mathcal{L}$ および $m^*\bigl(O(A)\bigr) = m^*(A)$ (すなわち $\mu(A) = \mu\bigl(O(A)\bigr)$) を示すことができる. よって (3) を得る.

以上から, $\mathcal{F} = \mathcal{L}$, μ をルベーグ測度とすれば面積に対して求める性質が満たされることがわかった. ここではルベーグ測度の構成は $\mathbb{R}^2$ で話を進めたが一般の $\mathbb{R}^n$ の場合も同様に構成することができる. 特に $\mathbb{R}^3$ の場合は体積という概念の正当化を与える. 尚, $A \in \mathcal{L}$ に対してはルベーグ測度と一致するような, $\mathbb{R}^2$ (もしくは $\mathbb{R}$) の部分集合全体に対して定義された有限加法的測度は存在

[8] $[a,b] \times [c,d]$ ならば辺を全て含み, $(a,b) \times (c,d)$ ならば辺は一切含まない. $(a,b] \times (c,d]$ ならば上と右の辺は含むが, 下と左の辺は含まない.

[9] $X \subset [0,\infty) \cup \{\infty\}$ とするとき, $m \leq x$ が全ての $x \in X$ に対して成り立つような $m \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$ の中で最大のものを $\inf X$ と書く. $\inf X$ は $[0,\infty) \cup \{\infty\}$ の範囲で必ず存在する.

[10] 開集合 A に対して, 互いに素な基本図形 B_k $(k \in \mathbb{N})$ で $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ かつ $m^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$ となるものが存在することを用いる.

[11] 例えば $L = \{(x,1) \,|\, a \leq x \leq b\}$ は $\varepsilon > 0$ とすると基本図形 $[a,b] \times [1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon/2]$ で覆うことができるから, $\mu(L) \leq \varepsilon(b-a)$ である. $\varepsilon > 0$ は任意に選べるから $\mu(L) = 0$ である.

[12] これにより $m^*\bigl(O(A)\bigr) \leq m^*(A) + \varepsilon$ が任意の $\varepsilon > 0$ に対して成立するから $m^*\bigl(O(A)\bigr) \leq m^*(A)$ を得る. 他方, $A = O^{-1}\bigl(O(A)\bigr)$ で O^{-1} も回転移動だから $m^*(A) \leq m^*\bigl(O(A)\bigr)$ であり, $m^*(A) = m^*\bigl(O(A)\bigr)$ である.

する (バナッハ–フォン・ノイマンの定理). しかし $\mathbb{R}^3$ においては, (選択公理の下では) このような有限加法的測度は存在しないことも知られている.

5　いくつかの注意

5.1　長方形 (正方形) の面積の公式

小学校において, 辺の長さが有理数 (分数) の場合の長方形もしくは正方形の面積の公式を学習する (有限小数は表記の問題で有理数の特殊な場合に過ぎない). おそらく多くの生徒たち (あるいは少なからぬ教師) は, 中学以降で辺の長さが有理数ではなく無理数の場合にも「縦 × 横」という公式で長方形の面積を求めることに何の疑問も抱いていないのではないだろうか. しかし小学校の教科書ではあくまで「公式」として導いているのであるから, ここにギャップがあることは認識しておくべきであろう. そしてこのギャップは目立たない形で小学校の教科書中にも現れている. 円の面積を求める場面で, 半径 × 円周の半分という長方形の面積を計算する. 円周率を小学校では 3.14 としているので, 有理数しか現れていないように見えるが, 実は円周率は無理数であり, 半径が有理数の場合には, 円周の半分は無理数である. したがって, この部分で正当化のされていない公式を用いていることになる.

尚, 4 節で見たように長方形の面積は「縦 × 横」であることを定義と思って理論を展開することができる. あるいは面積の性質 (IV) を用いると, 辺の長さが有理数の場合の公式から, 無理数の場合の公式を以下のように導くことができる. p, q を無理数とし, 辺の長さが p と q の長方形の面積を μ とおく. 有理数の列 $\{p_n\}, \{P_n\}, \{q_n\}, \{Q_n\}$ で $p_n \leq p \leq P_n$, $q_n \leq q \leq Q_n$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} P_n = p, \quad \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} Q_n = q$$

を満たすものが取れる (有理数の稠密性). 長方形の大小比較により $p_n q_n \leq \mu \leq P_n Q_n$. ここで $n \to \infty$ とした極限を取ると $pq \leq \mu \leq pq$, すなわち $\mu = pq$ である.

5.2　面積と積分の関係

高校では, (本稿で見たように実は明確な概念としては提示されていない) 面積の概念を確立したものとして, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ と $x = a$ と $x = b$ で囲まれる部分の面積が (ただし $g(x) \leq f(x)$ とする)

$$\int_a^b \bigl(f(x) - g(x)\bigr)dx$$

で求められるという説明をしている. ここで用いられるのは面積の性質 (II) と (IV) である. 逆に高校までで現れるような “図形” に関しては, 測度論まで持ち出さずとも, このような積分で面積を定義するというのが 1 つの統一的で簡単な方法である. ただし, 現行のカリキュラムでは, 積分を定積分から導入せず, 微分の逆演算として不定積分を導入し, そこから定積分を定義しているため, この方法では面積の定義が直観的には分かりにくくなる恐れがある[13].

6　最後に

本稿では面積 (あるいは広さ) の本質は性質 (I)–(IV) にあることを見た. これらは全く不思議な性質ではなく, いずれも無自覚のうちに用いる, ある意味当然とも思える性質であろう. その意味では, これらを子どもたちに明確に認識させる必要はないかもしれない. しかし, 指導する教師が, 面積の本質を意識しておけば, 子どもの疑問に真正面から答えることが可能となり, 指導力の向上に確実につながるものと思われる. また, そのような性質を満たす量が確かに存在することを認識しておくことは教師の素養として重要であろう. 教師を目指す教育学部の学生は, このことを厳密に理解しておくことが望まれる. 以上を充分認識したうえで, 本研究で得た成果を, 今後の実践教育と大学教育に生かしていきたい.

参考文献

[1] 小学校学習指導要領解説 算数編 平成 20 年 8 月, 文部科学省.

[2] 中学校学習指導要領解説 数学編 平成 20 年 9 月, 文部科学省.

[3] 高等学校学習指導要領解説 数学編 平成 21 年 11 月, 文部科学省.

[4] わくわく算数 1,2,3,4,5,6, 啓林館.

[5] 平成 23 年度教科書カリキュラム作成資料 わくわく算数 1〜6 年, http://www.shinko-keirin.co.jp/keirinkan/new_karikyuramu/~data/23nen/sansu_karikyuramu23.pdf

[6] 小谷眞一, 測度と確率, 岩波書店, 2005.

[7] 本宮テイ, 広さについての単位概念の理解をどのように深めるか, 日本数学教育会誌, 49(2), 1967, 17-20.

[8] 柴田良弘, ルベーグ積分論, 内田老鶴圃, 2006.

[9] 砂田利一, 新版バナッハ-タルスキーのパラドックス, 岩波書店, 2009.

[10] 渡辺昭, 面積の指導について, 日本数学教育会誌, 46(10), 1964, 184-187.

[13] 歴史的にも積分はまさに面積や体積の理論と関連して微分とは無関係に発達した概念であり, 微分と無関係に定義できる.