

算数・数学教育の教材としてのハノイの塔の考察と拡張

An Investigation and Extension of Tower of Hanoi
as a Teaching Material of Mathematics Education

北山 秀隆*

Hidetaka KITAYAMA
(和歌山大学教育学部)

南 拓弥

Takuya MINAMI
(和歌山大学教育学部)

西山 尚志

Hisashi NISHIYAMA
(和歌山大学教育学部)

田川 裕之†

Hiroyuki TAGAWA
(和歌山大学教育学部)

鷺山 峻大

Takahiro WASHIYAMA
(和歌山大学教育学部)

山本 紀代

Noriyo YAMAMOTO
(和歌山市教育委員会)

2016年7月28日受理

ゲームやパズルを解くための思考力, 実験による推論は, 小学校での算数教育, 中学校・高等学校での数学教育においてとても大切である. 本稿では, ハノイの塔の算数・数学教育での教材としての位置づけについての考察及び最短手順に関する厳密な証明, さらに, ハノイの塔を拡張したパズルの最短手順を, フィボナッチ数列とよく似た表示及び超幾何級数を用いた表示の2種類で記載することを目的とする.

1 序

ハノイの塔は, フランスの数学者であるエドゥアール・リュカが1883年に考案したパズルとして知られている. 数学モデルとしての定義は後述とするが, 簡単に述べると, 左端, 中央, 右端というような3列があり, 大きさのすべて異なる n 枚のプレートが左端の列に, 大きいものが下になるように順に積まれている. この状態から下記の条件 (i), (ii) を満たすように, 全てのプレートを右端の列に移動させるパズルである.

- (i) 一番上に積まれている1枚のプレートしか一度に移動できない.
- (ii) 小さなプレートの上に大きなプレートはおけない.

例えば, $n=3$ の場合には, 次のような移動が考えられる.



本稿では, 2章で, 算数・数学教育の教材としてのハノイの塔の位置づけについての考察及びハノイの塔を完成させるために必要な最小の手順数についての厳密な証明を行い, 3章では, ハノイの塔のプレートの大きさによって上に持ち上げられる高さに制限を付けた「カエルのハノイの塔」と呼ばれる Smart Game Cafe [1] に掲載されたパズルをさらに拡張して得られる数列の一般項をフィボナッチ数列とよく似た表示と超幾何級数を用いた表示の2種類で記載することを目的とする. さらに, 4章においては, プレートの大きさとハノイの塔に重みを付けた多項式について言及する.

2 教材としてのハノイの塔

まずは, 算数教育の教材としてのハノイの塔の位置づけについて考えてみよう.

平成29年の学習指導要領改訂により, 「数学的な見方・考え方」は算数科の学習の根本を担うものとして位置づけられ, 小学校学習指導要領解説 算数編 [2] でも, (2) 算数科の目標の改善において

「数学的な見方・考え方」は, 数学的に考える資質・能力の三つの柱である「知識及び技能」, 「思考力・判断力・表現力等」及び「学びに向かう力, 人間性等」の全てに対して働かせるもの

と記されていることから, 「数学的な見方・考え方」を確実に育成することが必要とされている. そのためのひとつの教材としてハノイの塔は位置づけられている. 高橋等 [5] は, ハノイの塔は, 主体的な算数・数学的活動を促し, (左端の全てのプレートを右端に移動させる) 最小の手順数を求めるために, 表を用いて, プレートの数が n 枚の場合を求めようという考えから, $2^n - 1$ という一般化にいたる良い教材として取り上げてい

*本研究の一部は, JSPS 科研費 JP15K17511 の助成を受けたものです.

†本研究の一部は, JSPS 科研費 JP16K05060 の助成を受けたものです.

る。また、山本博和 [6] は、問題解決型の学習には空間表象の発達が必要であり、「具体的操作活動→映像的操作→形式的操作」という問題解決の過程を経て、子供は問題解決能力を向上させていく」と述べ、その教材としてハノイの塔を取り上げている。ハノイの塔というパズルを、 n 枚の場合の最小の手順数 $= 2^n - 1$ と式で表現する過程には、具体物の操作を通して数学的活動を導き、操作活動を見直して整理するという「数学的な見方・考え方」が必要とされる。また、ハノイの塔は、子供の実態に合わせた多様な展開が考えられることも教材として有効な一面である。プレートと列のモデルを与えることで、算数を得意とする子供もそうでない子供も楽しみながら課題に向かうことができ、既習学習の定着や理解の程度に関係なく、全員が同じ立ち位置から課題に向き合うことのできる教材でもある。さらには、子供の実態に応じて、「最初に与えるプレートの数」や、「数学的な見方・考え方」の具体的な目標等を柔軟に設定することもできる。目標設定として、①手順数を記録する方法、②記録したものの読み取り方、③記録から式を導く、④より一般化された式の発見、等が考えられる。①から④は、教材を学ぶ際の基本的な算数科での指導の流れである。ハノイの塔を教材とした場合、例えば、次のような展開が考えられる。

ハノイの塔のルールを説明し、プレートが n 枚の場合に「より少ない手順数を求める」という課題の解決に向かわせる。具体物を操作しながら手順数を数えるためには、記録する必要が生じる(①手順数を記録する方法)。この記録の仕方には個人差があり、子供は次の A や B の方法を使うことが予想される。

A. プレートと列を簡単な図で表し、手順を追って図を書き加えていく方法。

B. プレートを移動した時点で、例えば「正」のように数を加えていく方法。

$n \leq 3$ であれば、ほとんどの子供は「7」を見つけることはできるが、 $n = 4$ の場合、無意識にプレートを移動していると「15」にたどり着くのが難しくなり、プレートを移動する手順について工夫するとともに、A や B の方法を続けることにも困難が生じてくる。そこで「①手順数を記録する方法」の検討が必要になる。より正確で効率的な記録方法を子供が発見するために、数学的な見方・考え方が必要とされる。自分の方法を他の子供の方法と比較・検討することにより、効率的で正確に記録することのよさを実感させることが重要である。ここでは、記録方法の検討と合わせて、プレートの移動方法も検討する機会が生じる。また、 n が 1 増えると手順数が急に増えることが見えてくるとともに、プレートの数と手順数との関係に着目する契機となる。記録方法として活用されるのが、既習事項の「C表にまとめる方法」(表1)である。

表 1: プレートの数と手順数

プレートの数	2	3	4	...	$n-1$	n
手順数	3	7	15	...		

$n \geq 4$ になると、B は、ほぼ使われなくなり、A を構造的に見直すことで、ある回数を中心に左右の図が逆転していることに気付かせることができる(②記録したものの読み取り方)。具体物の操作や記録した A の図から、プレートが 1 枚増えると、手順は前の手順数と同じ回数をくり返し、増えた 1 枚分の移動が 1 回増えるという構造が見えてくる。

プレートが 3 枚の場合：3 (2 枚の時の手順数) + 1 (増えた 1 枚) + 3 (2 枚の時の手順数) = 7

プレートが 4 枚の場合：7 (3 枚の時の手順数) + 1 (増えた 1 枚) + 7 (3 枚の時の手順数) = 15

その結果、5 枚の場合、15 (4 枚の時の手順数) + 1 (増えた 1 枚) + 15 (4 枚の時の手順数) = 31 と推測することができる

$$n \text{ 枚の手順数} = (n-1 \text{ の手順数}) + 1 + (n-1 \text{ の手順数}) \dots \text{(a)}$$

にたどりつく。この考え方を利用すれば、6 枚、7 枚、... と実際に移動させたり図に記録したりしなくても、手順数を数えることができる(③記録から式を導く)。「C表にまとめる方法」に着目した子供は、プレートの数が 1 増加すると手順数はどれだけ変化するかを調べることとなり、ひとつ前の手順数の 2 倍に 1 を足した数になっていることを発見し

$$n \text{ 枚の手順数} = (n-1 \text{ 枚の手順数}) \times 2 + 1 \dots \text{(b)}$$

が導かれる。そこで (a) と (b) を比較することにより、数字の変化だけを考えていた (b) が、構造として理解できるようになる。さらに、表をみることにより、 $n = 2$ の手順数 $3 = 2 \times 2 - 1$ 、 $n = 3$ の手順数 $7 = 2 \times 2 \times 2 - 1$ 、 $n = 4$ の手順数 $15 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1$ 、を見だし n 枚の手順数 $= 2^n - 1$ のように「④より一般化された式の発見」ができる可能性もある。

算数科では、「③記録から式を導く」目標までの到達は可能であり、子供の実態によれば、「④より一般化された式の発見」も期待できる。単なる数字の操作に終始することなく、具体物の操作と関連づけて式を理解させることが重要である。

次に、高等学校学習指導要領解説 数学編 [3] によると、数学 B の数列領域は、数学的帰納法の考え方や漸化式等を用いた論理的思考力を養うために必須の学習領域として位置付けられている。以下、 n 枚のプレートに対するハノイの塔において、左端の全てのプレートを右端に移動させるために必要な最小の手順数を h_n とおく(最小の移動手順を最短手順とも呼ぶことにする)。前述のとおり、実験により、 $h_1 = 1$ 、 $h_2 = 3$ 、 $h_3 = 7$ 、 $h_4 = 15$ となりそうなのが容易にわかり、この時点で $h_n = 2^n - 1$ と予想して、その根拠となる関係式を探そうとする、もしくは、さらに n を増やしていき、何か効率的な解法はないものかと思案し、徐々に関係式

$$h_n = 1, \quad h_n = 2h_{n-1} + 1 \quad (n \geq 2)$$

が満たされていることを実感できるようになっていくと考えられる。従って、上記の関係式を実体験を通じて理解し、この漸化式を解くことで

$$h_n = 2^n - 1 \quad (n \geq 1)$$

となることが結論として得られる。解き方の手段としては、 $f_n = h_n + 1$ と置き換えて、 $f_1 = 2, f_n = 2f_{n-1}$ ($n \geq 2$) の漸化式を解くことで、 $f_n = 2^n$ を導き、 $h_n = 2^n - 1$ とするのが高等学校の数学では一般的だとは思いますが、 $h_n = 2^n - 1$ となることを漸化式を用いた数学的帰納法で示してもよい。

しかしながら、これで本当にこの方針での移動が最小の手順数だといってよいのであろうか。

現時点で文部科学省検定済の15種類の数学Bの教科書を調べたところ、3冊でハノイの塔が掲載されていたが、最短であることについての厳密な証明は見当たらなかった。すなわち、実際のところは、実感で得られた方針（もしくは漸化式）は最短であるような気がするだけで、 $h_n \leq 2^n - 1$ を示しただけである。

そこで、この方針が最短であることを n についての数学的帰納法で示してみよう。

$n = 1$ のときには、 $h_1 = 1 = 2^1 - 1$ となり成立している。 $n = k - 1$ まで成立したと仮定する ($n \geq 2$)。 $n = k$ のときを考える。最短手順における一番重いプレート（このプレートを k と呼ぶことにする）の移動経路に着目する。 k が直前の場所にすぐに戻るのではなく（戻すことは、手順を無駄に消費することになるため、最短手順とはならない）、他の場所に移動するためには、 k 以外の他の全てのプレートを k のおいてある場所と移動したい場所以外の場所に移動させない限り k は移動できない。従って、 k が一度移動するためには、 h_{k-1} 回のプレートの移動が必要である。そこで k 枚のプレートの最短手順において、もし k が2回以上移動したと仮定すると、移動回数は $2h_{k-1} + 2 = 2^k$ 以上必要となり、実際に実現可能な $2^k - 1$ 回の移動手順よりも多数の移動となり矛盾である。従って、 k の移動は1回であり、 $2^k - 1$ が最短手順となる。以上のことから、数学的帰納法により、 $h_n = 2^n - 1$ が証明できた。なお、数学的帰納法は、小学生にとっては難しい概念ではあるが、最短であることを示すためのこのような考え方を感じ取ることは可能だと思われる。

また、ハノイの塔においては、プレートをおける場所は3か所のみであったが、もう1か所おける場所があった場合にはどうなるか、同じ大きさのプレートがあった場合にはどうなるか、（次節で考察を行う予定の）プレートを持ち上げる高さ制限を付けた場合にはどうなるか等の発展的なハノイの塔を考え出し、実験を行い解析していくことも容易に考えられる。

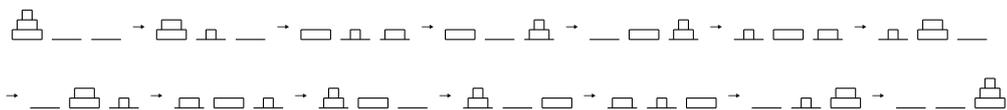
このように実験的に漸化式を見つけ出し、一般項を導くという一連の作業が楽しめる発展性を備えた教材であるハノイの塔は、算数の「実験・推論」を経験するために有効な教材、さらには高等学校の数列の応用例として適切な教材と考えられる。

3 カエルのハノイの塔

以下、 k, m を $1 \leq k \leq m$ を満たす自然数とする。まず、左端、中央、右端というように3列があり、大きさのすべて異なる m 匹のカエルが左端の列に、大きいものが下になるように順にかぶさって並んでいる（下からの高さが1の場所に一番大きなカエル、下からの高さが p の場所に、大きい方から数えて p 番目のカエルが位置しているとする）。この状態から下記の条件 (i), (ii), (iii) を満たすように、上から k 匹のカエルが右端の列に移動する最短の移動手順（最短移動経路と呼ぶことにする）を $A_m(k)$ で表し、 $A_m(k)$ において、カエルの移動した回数を $a_m(k)$ で表すことにする¹。

- (i) 一番上に乗っている1匹のカエルしか一度に移動できない。
- (ii) 小さなカエルの上に大きなカエルは移動できない。
- (iii) 大きい方から数えて p 番目のカエルは高さ p までしか飛び上がれない²。

例えば、(カエルではなくプレートとしての表示ではあるが) $A_3(3)$ としては次のような移動が考えられる。



また、実際に実験してみると、 $a_1(1) = 1, a_2(2) = 5, a_3(3) = 13, a_4(4) = 37, a_5(5) = 93$ となることが予想できる。このように、ハノイの塔に高さの制限が加わったパズルは、「カエルのハノイの塔」として [1] に掲載されている。本章では、 $a_m(k)$ を厳密に記載することを主たる目的とする。

3.1 「カエルのハノイの塔」の数学モデル化

本節では、「カエルのハノイの塔」の最短移動経路を、数学的に厳密に定義することを目的とする。

まず、カエルのハノイの塔の移動経路をカエルで図示する代わりに、 m 匹のカエルに対して、小さいカエルから順に、 $1, 2, 3, \dots, m$ を対応させ、 $1, 2, \dots, m$ と 0 を成分とする $m \times 3$ 行列の移動として考えることにする。例えば、 $A_3(3)$ に対応する移動経路は、次のように記載できる。

¹飛び上がれる条件 (iii) がいない場合には、ハノイの塔と同じ条件となる。

²i.e. 大きいカエルほど高く飛べない。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

このようにカエルの移動を $m \times 3$ 行列の移動とみると、「カエルのハノイの塔」の最短移動経路は、次のような数学モデルとして言い換えられる。

$m \geq 1$ に対して、次の (1), (2), (3) を満たす行列 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3}$ 全体の集合を $M(m)$ とおく。

- (1) A の成分は $0, 1, 2, \dots, m$ のみである. i.e. $\{a_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\} = \{0, 1, 2, \dots, m\}$.
- (2) A の成分には、 $1, 2, 3, \dots, m$ がどこかに1つずつある. i.e. $1 \leq s \leq m$ に対して、 $|\{(i,j); a_{i,j} = s\}| = 1$. ただし、集合 S に対して、 $|S|$ は S の元の個数を表すものとする。
- (3) A の各列の成分は上から下に向かって増加している. i.e. $j = 1, 2, 3$ に対して、 $a_{1,j} \leq a_{2,j} \leq \dots \leq a_{m,j}$.

$A, B \in M(m)$, $A \neq B$ に対して、次の (4), (5) を満たすとき $A \rightarrow B$ で表し、 A から B へは1回で移動可能と呼ぶことにする。ただし、 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3}$ とする。

- (4) B は、 A の2つの成分 0 と s ($s \geq 1$) を交換した行列である. i.e. $|\{(i,j); a_{i,j} \neq b_{i,j}\}| = 2$ であり、 $a_{s_1, t_1} \neq b_{s_1, t_1}$, $a_{s_2, t_2} \neq b_{s_2, t_2}$, $(s_1, t_1) \neq (s_2, t_2)$ とすると $\{a_{s_1, t_1}, a_{s_2, t_2}\} = \{b_{s_1, t_1}, b_{s_2, t_2}\} = \{0, s\}$ となる $s \geq 1$ が存在する。
- (5) $a_{s_1, t_1} \neq b_{s_1, t_1}$, $a_{s_2, t_2} \neq b_{s_2, t_2}$, $a_{s_1, t_1} = s$ ($s \geq 1$), $a_{s_2, t_2} = 0$ とする. $\{t_1, t_2\} = \{1, 3\}$ のとき³, $a_{s, 2} = 0$.

以上の設定の下で、 $A, B \in M(m)$, $A \neq B$ に対して

$$P(A, B) = \bigcup_{r \geq 1} \{(A_0, A_1, \dots, A_r) \in M(m)^{r+1}; A = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_r = B\},$$

$P = (A_0, \dots, A_r) \in P(A, B)$ に対して、 $\ell(P) = r$ とおき、さらに $A, B \in M(m)$, $P(A, B) \neq \emptyset$ に対して

$$\ell(A, B) = \min\{\ell(P); P \in P(A, B)\}$$

と定義する⁴。また、 $1 \leq k \leq m$ に対して、「カエルのハノイの塔」の最短移動経路 $A_m(k)$ での最初と最後の状態に対応する行列 $X_m, X_m(k) = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3} \in M(m)$ を

$$X_m = (\delta_{1,j}^i)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3}, \quad x_{i,j} = \begin{cases} i & \text{if } i \geq k + 1, j = 1, \\ i - m + k & \text{if } i \geq m - k + 1, j = 3, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する⁵。i.e.

$$X_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_m(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ k+1 & & 1 \\ k+2 & & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m & 0 & k \end{pmatrix}$$

である。このとき、 $a_m(k) = \ell(X_m, X_m(k))$ であることから、 n 匹の「カエルのハノイの塔」の最短手順を求める問題は、 $\ell(X_n, X_n(n))$ を求めよということになる。

3.2 $a_m(k)$ の関係式

本節では、 $a_m(k)$ の関係式を求めることを目的とする。以下、「カエルのハノイの塔」で用いた記号を、前節での数学モデルとして考えた場合の記号としても利用することとする。即ち、 $a_m(k) = \ell(X_m, X_m(k))$ とし、 $P \in P(X_m, X_m(k))$ で $\ell(P) = a_m(k)$ を満たすものの一つを $A_m(k)$ とする⁶。また、移動を明確にするために、行列での 0 は省略し、1回の移動を \rightarrow で、複数回の移動を \Rightarrow で表すものとする。例えば、 $A_4(4)$ としては、次のような移動経路が考えられる。

³ $a_{s_1, t_1} \neq a_{s_2, t_2}$ であることと、 $M(m)$ の条件 (4) から $t_1 = t_2$ となることはない。また、この条件は、カエルが飛び上がれる高さの条件に対応している。
⁴ 実数の有限部分集合 S に対して、 $\min S$ は S の最小値を表すこととする。
⁵ $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタ、i.e. $i \neq j$ のとき $\delta_{i,j} = 0$, $i = j$ のとき $\delta_{i,j} = 1$, とする。
⁶ 結果的に、 $A_m(k)$ は一意に定まることもわかる。

Proposition 3.5. (i) $n \geq 1$ に対して

$$a_n(n) = \frac{(5 + \sqrt{17})(1 + \sqrt{17})^{n-1} - (5 - \sqrt{17})(1 - \sqrt{17})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{17}} - 1. \quad (5)$$

(ii) $1 \leq k \leq m$ に対して

$$a_m(k) = \begin{cases} 2^{m-k}(a_{2k-m}(2k-m) + 1) - 1 & \text{if } m \leq 2k - 2, \\ 2^k - 1 & \text{if } m \geq 2k - 1. \end{cases} \quad (6)$$

(3) に $b_n(n) = a_n(n) + 1$ を代入すれば, $\{a_n(n)\}_{n \geq 1}$ は

$$a_1(1) = 1, a_2(2) = 5, a_n(n) = a_{n-1}(n-1) + 4a_{n-2}(n-2) + 4 \quad (n \geq 3)$$

で決定される数列である. 従って, この関係式から, $\{a_n(n)\}_{n \geq 1}$ の母関数は次で記載できることが容易にわかる.

Corollary 3.6.

$$\sum_{k \geq 1} a_k(k)x^k = \frac{x(1+3x)}{(1-x)(1-x-4x^2)}. \quad (7)$$

3.4 $a_m(k)$ の超幾何級数を用いた表示

以下, 複素数 a , 非負整数 k に対して, ポツホハマー記号 $(a)_k$ を

$$(a)_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0, \\ \prod_{i=0}^{k-1} (a+i) & \text{if } k > 0 \end{cases}$$

で定義し, 2 以上の整数 r , 複素数 $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{r-1}$ に対して, 超幾何級数 ${}_rF_{r-1} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_{r-1} \end{matrix}; z \right)$ を

$${}_rF_{r-1} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_{r-1} \end{matrix}; z \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k \prod_{i=1}^r (a_i)_k}{k! \prod_{i=1}^{r-1} (b_i)_k}$$

で定義する. オンライン整数列大辞典 [4] から

$$b_n = c_{n-1} + 2c_{n-2}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n 4^k \binom{n-k}{k}$$

と記載できる. ただし, $\binom{a}{b}$ は, $0 \leq b \leq a$ のときのみ $\frac{a!}{b!(a-b)!}$ とし, それ以外については 0 と定義する. この表記を書き直すと, 結果的に次が得られる.

Lemma 3.7. $2 \leq k \leq m \leq 2k - 2$ に対して

$$a_m(k) = 3 \cdot 2^{m-k+1} \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{m-2k+2}{2}, \frac{m-2k+1}{2}, \frac{3m-6k+8}{5} \\ m-2k+2, \frac{3(m-2k+1)}{5} \end{matrix}; -16 \right) - 1. \quad (8)$$

特に, $k = m = n$ のとき

$$a_n(n) = 6 \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -\frac{n-2}{2}, -\frac{n-1}{2}, -\frac{3n-8}{5} \\ -n+2, -\frac{3(n-1)}{5} \end{matrix}; -16 \right) - 1. \quad (9)$$

Lemma 3.7 の系として, 次が得られる.

Corollary 3.8. $4 \leq k \leq m \leq 2k - 4$ に対して

$$\begin{aligned} & {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{m-2k+2}{2}, \frac{m-2k+1}{2}, \frac{3m-6k+8}{5} \\ m-2k+2, \frac{3(m-2k+1)}{5} \end{matrix}; -16 \right) \\ &= 4 \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{m-2k+4}{2}, \frac{m-2k+3}{2}, \frac{3m-6k+14}{5} \\ m-2k+4, \frac{3(m-2k+3)}{5} \end{matrix}; -16 \right) + {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{m-2k+2}{2}, \frac{m-2k+3}{2}, \frac{3m-6k+11}{5} \\ m-2k+3, \frac{3(m-2k+2)}{5} \end{matrix}; -16 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

なお, (10) の拡張となる関係式として, 次が成立する⁸.

Proposition 3.9.

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{(5a-5c+2)(5b-5c+4)z}{(5c-2)(5c-5d-4)}\right) {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, c-1 \end{matrix}; z \right) \\ &= \frac{a(b-d)(5c+1)z}{(5c-5d-4)(5c-2)d(d+1)} \left(5c-5d-2 - \frac{(5a-5c+2)(b-c+1)z}{c-1}\right) {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a+1, b+1, c+\frac{6}{5} \\ d+2, c+\frac{1}{5} \end{matrix}; z \right) \\ &+ \left(1 + \frac{(ab-5a(b-c+1)d+(c-1)(5b-5c+4)d)z}{(c-1)d(5c-5d-4)}\right) {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b+1, c+\frac{3}{5} \\ d+1, c-\frac{2}{5} \end{matrix}; z \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Proof. 一般に

$$\begin{aligned} & (a+k-1)b(b+k-1)(5c-2)^2(5c+1)(5c-5d-4)(c+k-1)(d+k) \\ & - (5a-5c+2)b(5b-5c+4)(5c+1)(5c-2)(c+k-2)(d+k-1)(d+k) \\ & - (a+k-1)(b-d)(b+k-1)(c-1)(5c-2)(5c+1)(5c-5d-2)(5c+5k-4)k \\ & + (5a-5c+2)(b-c+1)(b-d)(5c-2)(5c+1)(5c+5k-9)(d+k)(k-1)k \\ & - (a+k-1)(b+k)(b+k-1)(c-1)(5c-2)(5c+1)(5c-5d-4)(5c+5k-2)d \\ & - (ab-5a(b-c+1)d+(c-1)(5b-5c+4)d)(b+k-1)(5c-2)(5c+1)(5c+5k-7)(d+k)k = 0 \end{aligned}$$

であることを利用すると, (11) の両辺の z^k ($k \geq 0$) の係数の一致が示せる. 詳細は略とする. \square

4 重み付きハノイの塔

本節では, ハノイの塔から定義される多項式についての言及を目的とする.

n 枚のプレートに対するハノイの塔の最短手順において, 小さい方から数えて k 番目のプレートを移動させた回数を w_k とおき

$$h(n; q) = \sum_{k=1}^n w_k q^{k-1}$$

と定義する. このとき, ハノイの塔の帰納的な動かし方を考慮することにより次の成立が容易に示せる.

Lemma 4.1. (i)

$$h(1; q) = 1, \quad h(n; q) = 2h(n-1; q) + q^{n-1} \quad (n \geq 2).$$

(ii) $n \geq 1$ に対して

$$h(n; q) = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} q^k = \frac{2^n - q^n}{2 - q}.$$

この結果のカエルのハノイの塔への拡張は, 今後の研究対象の一つとして考えられる.

5 謝辞

著者の1名が [1] において, 「カエルのハノイの塔」に遭遇したことがきっかけでこの研究が始まりました. この web site の管理人, パズルの考案者及びアプリの作成者に感謝の意を表したいと思います.

参考文献

- [1] Smart Game Cafe (カエルのハノイの塔), <http://ja.game-cafe.net/topindex.php?id=froghanoi>
- [2] 文部科学省, 「小学校学習指導要領解説 算数編」(2017).
- [3] 文部科学省, 「高等学校学習指導要領解説 数学編」(2009).
- [4] オンライン整数列大辞典, <https://oeis.org/A026581>, <https://oeis.org/A006131>
- [5] 高橋等, “子どもの算数・数学的活動を大事にする, 湧き出させる”, 上越数学教育研究 18 (2003), 31-48.
- [6] 山本博和, “空間表象能力の発達に基づく算数教育の在り方”, The Journal of Social Welfare 16-2 (2013), 93-102.

⁸(11) において, (a, b, c, d, z) を $(\frac{m-2n+2}{2}, \frac{m-2n+1}{2}, \frac{3m-6n+8}{5}, m-2n+2, -16)$ と置き換えて, 整理すると (10) が得られる.