数学教育の教材としてのフィボナッチ数の考察とフィボナッチ数のべき乗和の公式の一般化

An investigation of Fibonacci numbers as a teaching material of mathematics education and an extension of the formula of the power sum of Fibonacci numbers

2018 年 10 月 23 日受理

北山 秀隆*
Hidetaka KITAYAMA
(和歌山大学教育学部)

松山 ともこ
Tomoko MATSUYAMA
(紀の川市教育委員会)

西口 正純
Masazumi NISHIGUCHI
(紀の川市立那賀中学校)

西山 尚志
Hisashi NISHIYAMA
(和歌山大学教育学部)

田川 裕之†
Hiroyuki TAGAWA
(和歌山大学教育学部)

田窪 佳寿子
Kazuko TAKUBO
(和歌山市立太田小学校)

本稿では, 高等学校の数列領域で頻出するフィボナッチ数の位置づけ, 及びフィボナッチ数を拡張して多変数化した多項式のべき乗和の一般式を求める。さらに, 一般式の証明に利用した関係式をもとに, 超幾何級数 ${}_4F_3$ の関係式と等式の導出を目的とする。

1 序

フィボナッチ数 f_n は, レオナルド・フィボナッチ（12 世紀から 13 世紀のイタリアの数学者）にちなんで名付けられたと言われており, 0 以上の整数 n に対して, 次の漸化式で定義される。

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ (n \geq 2).$$

この定義式にしたがって f_n を求めると

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

となる。このように, フィボナッチ数 f_n は隣接 3 項間の漸化式で定義されることから, 高等学校の数列領域での特性多項式を用いた一般解を求める際の例として, とてもよく利用されている。実際に, 特性多項式を利用して f_n の一般解を求めてみると

$$f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} \tag{1}$$

となることが容易にわかる。また, フィボナッチ数の意味づけとしては, 例えば, n 段の階段をのぼる際に, 2 段飛ばしを可とした場合ののぼり方の方法は, フィボナッチ数 f_{n+1} であり, 他にも花びらや螺旋等の自然界にもフィボナッチ数は多数潜んでいることが知られている。また, フィボナッチ数には様々な数学的にとても興味深い関係式が数多く成立している。Web で検索してみれば、多くの話題と関係式を見つけることができるため、詳しく記載することはここでは控えるが, 例えば

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}, \sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1,\ \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} = f_{2k},\ \sum_{k=1}^{n} f_{2k} = f_{2n+1} - 1,\ f_{2n} = f_n L_n$$

といったものがある。ただし, L_n はリュカ数と呼ばれるフィボナッチ数とよく似た漸化式, i.e.

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}\ (n \geq 2)$$

で定義される有名な数である。なお, フィボナッチ数に関して定義される様々な数列については, オンライン整数列大辞典 (OEIS [2]) に多数情報が掲載されており, 例えば, https://oeis.org/A000045 にフィボナッチ数そのものについても詳しく記載されている。そこで, フィボナッチ数のべき乗和について調べたところ, 下記の情報が得られた。なお、括弧に記載の A から続く記号は OEIS での番号である。等式については, 様々な表示があるため, 系統性があると考えられる形での表示となっている。

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = -1 + (f_{n+1} + f_n)\ \text{【A000071】},\quad \sum_{k=0}^{n} f_k^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{5} + \frac{1}{5}(f_{2(n+1)} + f_{2n})\ \text{【A001654】},$$

*本研究の一部は, JSPS 科研費 JP15K17511 の助成を受けたものです.
†本研究の一部は, JSPS 科研費 JP16K05060 の助成を受けたものです.

$$\sum_{k=0}^{n} f_k^3 = \frac{1}{2} - \frac{3(-1)^n}{5}(f_{n+1} - f_n) + \frac{1}{20}(f_{3(n+1)} + f_{3n}) \text{【A005968】},$$

$$\sum_{k=0}^{n} f_k^4 = \frac{3(2n+1)}{25} - \frac{4(-1)^n}{25}(f_{2(n+1)} - f_{2n}) + \frac{1}{75}(f_{4(n+1)} + f_{4n}) \text{【A005969】},$$

$$\sum_{k=0}^{n} f_k^5 = -\frac{7}{22} + \frac{2}{5}(f_{n+1} + f_n) - \frac{(-1)^n}{20}(f_{3(n+1)} - f_{3n}) + \frac{1}{275}(f_{5(n+1)} + f_{5n}) \text{【A098531】}.$$

本稿では, 2 章で, 数学教育の教材としてのフィボナッチ数の位置づけについての考察を行い, 3 章では, フィボナッチ数とリュカ数をさらに拡張した多項式を導入し, 本節で役立つ基本的な等式について述べる。さらに, 4 章では, 3 章で得られた等式を利用して, フィボナッチ数のべき乗和 $\sum_{k=1}^{n} f_n^r$ の等式の拡張と証明を行ない, 5 章においては, 3 章で得られた等式をもとに超幾何級数の関係式の発掘を目的とする。

2　教材としてのフィボナッチ数

フィボナッチ数については, 高等学校の教科書によっては, 必ずしも書かれていない題材となっているのが現状である。しかし, 一般項に黄金比 (無理数) が現れることの意外さや, $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ といった公式など, 実際に扱ってみると様々な事実を見出すことができ, 数学的な面白さを身近に感じやすい題材であり, 高校生が取り組める数学的活動としてフィボナッチ数を扱うことにも興味がある。実際に大学での授業では, フィボナッチ数について興味を示す学生は多いと感じている。数列分野以外でも, 関連する話題として取り扱ってもよいかもしれない。わずかではあるが, 以下にそのような例をあげる。

2 項定理の学習で $2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = d_n + f_n\sqrt{5}$ と整数 d_n, f_n を用いて表せることを扱い, ここからフィボナッチ数を導入していくことが考えられる。このような観点からは, パスカルの 3 角形との関連などを紹介することも興味があるだろう。

また, ベンフォードの法則「自然界に現れる大多数の数値の最高位の数の分布は, 一様ではなく, ある特定の分布となっている。」と関連して数学 II の対数の学習で扱うことも考えられる。フィボナッチ数列 $1, 1, 2, 3, 5, 6, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ の最高位の数を取り出すと $1, 1, 2, 3, 5, 6, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ となり, やや 1 の出現頻度が高いように思われる。 実際に最初の 1000 項を調べてみると次の表のようになる。

最高位の数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
頻度	301	177	125	96	80	67	56	53	45
相対頻度	0.301	0.177	0.125	0.096	0.08	0.067	0.056	0.053	0.045

ここから法則を導くのは難しいかもしれないが, $\log_{10} 2 = 0.3010\cdots$ ということにヒントを得て, $\log \frac{k+1}{k}$ の値を考えてみると次のようになる。

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log \frac{k+1}{k}$	0.3010	0.1761	0.1249	0.0969	0.07918	0.0669	0.0580	0.0512	0.0458

この表からフィボナッチ数の最高位の数の出現頻度をよく近似していることが期待される。最高位の数については, 対数分野で学習するが, 最高位の数についてこのような性質が成り立つということは生徒にとって驚きであろう。こういった事実を観察することも数学に対する興味を引き出すうえで効果的だと考えられる。

さて, このような最高位の数の分布について数学的には, 次のように説明される。まず正の実数 a に対して, a の小数部分 $\{a\}$ を $\{a\} = a - [a]$ で定義する。 ただし $[a]$ は a の整数部分, すなわち a を超えない最大の整数とする。 次の定理はよく知られている。

Theorem 2.1. (ワイルの一様分布定理) a を無理数とすると, 数列 $\{\{na\}\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0, 1)$ 上一様分布する。すなわち $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ のとき, 次が成り立つ。ただし, 有限集合 A に対して, $\#A$ は A の元の個数を表すものとする。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{m; 1 \leq m \leq n, \alpha \leq \{ma\} < \beta\}}{n} = \beta - \alpha.$$

次の事実は容易に示すことができる。

Lemma 2.2. $\log_{10} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は無理数であり, $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, b_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ とすると $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$

フィボナッチ数列の一般項は, (1) から $f_n = \frac{a_n - b_n}{\sqrt{5}}$ とも表せるので, Lemma 2.2, Theorem 2.1 から, 数列 $\{\{\log_{10} f_n\}\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0, 1)$ 上で一様分布することが, 極限についての若干の細かな議論は必要ではあるが, 証

明できる。ここで, f_n が, d 桁の整数で, 最高位の数が k $(k=1,2,\ldots,9)$ のときには, $k \le s < k+1$ を満たす実数 s を用いて, $f_n = s \times 10^d$ と表すことができ, $\{\log_{10} f_n\} = \{\log_{10} s + d\} = \log_{10} s$ となるので, f_n の最高位の数が k であるための必要十分条件は, $\log_{10} k \le \{\log_{10} f_n\} < \log_{10}(k+1)$ である。したがって, α, β をそれぞれ $\log_{10} k$, $\log_{10}(k+1)$ として, Theorem 2.1 を適用すると次が得られる。

Proposition 2.3. *$k=1,2,\ldots,9$ に対して, $A_k(n)$ を $f_1, f_2, \ldots, f_n$ の中で最高位の数が k であるものの個数とおくと, 次が成立する。*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#A_k(n)}{n} = \log_{10} \frac{k+1}{k}.$$

3 フィボナッチ数の拡張と諸性質

本節では, フィボナッチ数 f_n のパラメータと n の範囲を拡張した多項式を導入し, 以降で利用する際に役立つ基礎的な等式についてまとめることを目的とする。まず, $n \in \mathbb{Z}$, $a, b, w, z \in \mathbb{C}$ $(z \ne 0)$ に対して, $F_n(a,b;w,z)$ を次を満たす多項式として定義する[1]。

$$F_0(a,b;w,z) = a,\ F_1(a,b;w,z) = b,\ F_n(a,b;w,z) = wF_{n-1}(a,b;w,z) + zF_{n-2}(a,b;w,z) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{2}$$

さらに, $F_n(a,b;z) = F_n(a,b;1,z)$, $F_n(a;z) = F_n(a,1;z)$ で表すことにする。特に $n \ge 0$ に対しては

$$f_n = F_n(0;1),\ L_n = F_n(2;1)$$

であり, 負の場合も含むフィボナッチ数 $F_n(0;1)$ は

$$\cdots, -55, 34, -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$$

となっている。なお, $F_n(a,b;w,z)$ は, 下記 (3) から $dF_n(c;u)$ の形に帰着できるため, 以降は, $F_n(a,b;z)$, $F_n(a;z)$ を主として取り扱う。

また, $n \ge 0$ に対して, K_n を, n 段の階段を 2 段飛びを可として上がる方法全体の集合とし, $T \in K(n)$ に対して, T の中の 2 段飛びした回数を $d(T)$ で表し, $G_n(z) = \sum_{T\in K_n} z^{d(T)}$ とおく。例えば, $n = 0,1,2,3$ に対して, $G_n(z)$ は順に $1, 1, 1+z, 1+2z$ である, 一般に, $G_n(z) = F_{n+1}(0;z)$ となることも容易にわかる。

まず, 一般に次が成立する。

Lemma 3.1. *$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して, 次が成立する。*

$$F_n(a,b;w;z) = w^n F_n(a, \frac{b}{w}; \frac{z}{w^2}) = bw^{n-1} F_n(\frac{aw}{b}; \frac{z}{w^2}). \tag{3}$$

$$F_{-n}(a,b;z) = (-z)^{-n} F_n(a, a-b; z). \tag{4}$$

$$F_n(a,b;z) + F_n(c,d;z) = F_n(a+c, b+d; z),\ F_n(da, db; z) = dF_n(a,b;z). \tag{5}$$

$$F_n(a,b;z) = bF_n(\frac{a}{b}; z) = aF_{n+1}(0;z) + (b-a)F_n(0;z) = azF_{n-1}(0;z) + bF_n(0;z). \tag{6}$$

$$F_n(a,b;z) = F_{n-1}(b, b+az; z). \tag{7}$$

$$F_n(a,b;z) = F_{n+1}(\frac{b-a}{z}, a; z). \tag{8}$$

$$F_{m+n}(a,b;z) = F_{n+1}(0;z)F_m(a,b;z) + zF_n(0;z)F_{m-1}(a,b;z). \tag{9}$$

$$F_{m+n}(a,b;z) = F_n(2;z)F_m(a,b;z) - (-z)^n F_{m-n}(a,b;z). \tag{10}$$

$$F_{m+n}(a,b;z) = F_n(0;z)F_m(-a+2b, b+2az; z) + (-z)^n F_{m-n}(a,b;z). \tag{11}$$

$$2F_{m+n}(a,b;z) = F_n(0;z)F_m(-a+2b, b+2az; z) + F_n(2;z)F_m(a,b;z). \tag{12}$$

Proof. (3), (4), (5), (6), (7), (8) については, 左辺が右辺と同じ関係式 (2) を満たすことが容易に示せるので略とする。次に, (9) を示す。まず, $n \ge 0$ の場合に, n についての帰納法で示す。$n = 0, 1$ のときには, (2) と直接の計算により成立が示せる。$n-1$ まで成立したと仮定する $(n \ge 2)$。(2) を利用して, 帰納法の仮定を用いると

$$\begin{aligned}(9)\text{ の左辺-右辺} &= F_{m+n-1}(a,b;z) - F_n(0;z)F_m(a,b;z) - zF_{n-1}(0;z)F_{m-1}(a,b;z) \\ &\quad + z(F_{m+n-2}(a,b;z) - F_{n-1}(0;z)F_m(a,b;z) - zF_{n-2}(0;z)F_{m-1}(a,b;z)) = 0\end{aligned}$$

[1] $F_n(a,b;w,z) = \frac{1}{z}(F_{n+2}(a,b;w,z) - wF_{n+1}(a,b;w,z))$ と記載できることに注意

となり成立する。次に, $n<0$ のときの成立を示す。$n=-r>0$ と置き換えると

$$
\begin{aligned}
&(9)\text{ の左辺-右辺} = F_{m-r}(a,b;z) - F_{-r+1}(0;z)F_m(a,b;z) - zF_{-r}(0;z)F_{m-1}(a,b;z)\\
&= (-z)^{m-r}(F_{-m+r}(a,a-b;z) - F_r(0;z)F_{-m+1}(a,a-b;z) - zF_{r-1}(0;z)F_{-m}(a,a-b;z)) \quad (\because (4)) \quad = 0
\end{aligned}
$$

となり成立する。次に, (10) を示す。(6) から $F_n(2;z) = 2F_{n+1}(0;z) - F_n(0;z)$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
(10)\text{ の左辺-右辺} &= F_{n+1}(0;z)F_m(a,b;z) + zF_n(0;z)F_{m-1}(a,b;z) - F_n(2;z)F_m(a,b;z)\\
&\quad + (-z)^n(F_{-n+1}(0;z)F_m(a,b;z) + zF_{-n}(0;z)F_{m-1}(a,b;z) \quad (\because (9))\\
&= F_{n+1}(0;z)F_m(a,b;z) + zF_n(0;z)F_{m-1}(a,b;z) - F_n(2;z)F_m(a,b;z)\\
&\quad + zF_{n-1}(0;z)F_m(a,b;z) - zF_n(0;z)F_{m-1}(a,b;z) \quad (\because (4))\\
&= (zF_{n-1}(0;z) - F_{n+1}(0;z) + F_n(0;z))F_m(a,b;z) = 0 \quad (\because (2))
\end{aligned}
$$

となり成立する。次に (11) を示す。

$$
\begin{aligned}
&(11)\text{ の左辺-右辺}\\
&= F_{n+1}(0;z)F_m(a,b;z) + zF_n(0;z)F_{m-1}(a,b;z) - F_n(0;z)F_m(-a+2b,b+2az;z)\\
&\quad - (-z)^nF_{-n+1}(0;z)F_m(a,b;z) + (-z)^{n+1}F_{-n}(0;z)F_{m-1}(a,b;z) \quad (\because (9))\\
&= (F_{n+1}(0;z) - zF_{n-1}(0;z))F_m(a,b;z) + 2zF_n(0;z)F_{m-1}(a,b;z) - F_n(0;z)F_m(-a+2b,b+2az;z) \ (\because (4))\\
&= F_n(0;z)(F_m(a,b;z) + F_m(2(b-a),2az;z) - F_m(-a+2b,b+2az;z) \ (\because (2),(8),(5)).
\end{aligned}
$$

したがって, 再度 (5) を利用することで, (11) の左辺-右辺=0 が得られる。(12) は, (10) と (11) の両辺を足すことで得られる。 □

4　フィボナッチ数のべき乗和の等式

本節では次の証明を目的とする。利用する方法は二項定理と数学的帰納法である。

Proposition 4.1. $r\geq 1$, $n\geq 0$, $1+4z\neq 0$ に対して次が成立する[2]。

(i)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} z^{-\frac{(2r-1)k}{2}}F_k(0;z)^{2r-1} &= \frac{(-1)^{r-1}}{(1+4z)^{r-1}}\sum_{k=1}^{r}(-1)^k\binom{2r-1}{r-k}\frac{F_{2k-1}(0;z)}{F_{2k-1}(2;z)}\\
&\quad + \frac{(-1)^{r(n+1)}}{(1+4z)^{r-1}}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k(n+1)}z^{-\frac{(2k-1)n}{2}}\binom{2r-1}{r-k}\frac{F_{(2k-1)(n+1)}(0;z)+(-1)^{r+k}z^{\frac{2k-1}{2}}F_{(2k-1)n}(0;z)}{F_{2k-1}(2;z)}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

(ii)

$$
\sum_{k=0}^{n} z^{-2kr}F_k(0;z)^{4r} = \frac{1}{(1+4z)^{2r}}\Big((2n+1)\binom{4r-1}{2r} + \sum_{i=1}^{2r}(-1)^{i(n+1)}z^{-in}\binom{4r}{2r+i}\frac{F_{i(2n+1)}(0;z)}{F_i(0;z)}\Big).
\tag{14}
$$

(iii)

$$
\sum_{k=0}^{n} z^{-(2r+1)k}F_k(0;z)^{4r+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+4z)^{2r+1}}\Big(\binom{4r+1}{2r} + \sum_{i=1}^{2r+1}(-1)^{i(n+1)}z^{-in}\binom{4r+2}{2r+i+1}\frac{F_{i(2n+1)}(2;z)}{F_i(2;z)}\Big).
\tag{15}
$$

証明の前に補題を３つ示す。

[2] $z=-1/4$ のときには, (17) と記述できない。$F_n(0;-1/4)=n/2^{n-1}$, $F_n(2;-1/4)=1/2^{n-1}$ である。

Lemma 4.2. (i) $r \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k(n+1)}\binom{2r-1}{r-1+k}(x^k-(-1)^n x^{-k+1}) = ((-1)^{n+1}x)^{-r+1}(1-(-1)^n x)^{2r-1}. \tag{16}$$

(ii) $n \in \mathbb{Z}$, $1+4z \neq 0$ に対して

$$F_n(0;z) = \frac{(1+\sqrt{1+4z})^n-(1-\sqrt{1+4z})^n}{2^n\sqrt{1+4z}}. \tag{17}$$

(iii) $r \geq 1$, $n \geq 0$, $1+4z \neq 0$ に対して

$$\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k(n+1)}z^{-\frac{(2k-1)n}{2}}\binom{2r-1}{r-1+k}F_{(2k-1)n}(0;z) = (-1)^{r(n+1)}z^{-\frac{(2r-1)n}{2}}(1+4z)^{r-1}F_n(0;z)^{2r-1}. \tag{18}$$

Proof. (i) 左辺の和を２つに分けて, 後半の k を $r+1-k$ と置き換えて整理すると

$$(16)\text{ の左辺} = ((-1)^{n+1}x)^{-r+1}\Big(\sum_{k=1}^{r}\binom{2r-1}{r-1+k}((-1)^{n+1}x)^{r-1+k} - \sum_{k=1}^{r}\binom{2r-1}{k-1}((-1)^{n+1}x)^{k-1}\Big)$$

となるので, 二項定理より (16) が得られる。(ii) (17) の右辺を $\tilde{F}_n(0;z)$ とおくと, $\tilde{F}_0(0;z)=0$, $\tilde{F}_0(0;z)=1$ であり, $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $\tilde{F}_n(0;z)=\tilde{F}_{n-1}(0;z)+z\tilde{F}_{n-2}(0;z)$ を満たすことは, 単純計算で容易に示すことできるため詳細は略とする。(iii) $y=\frac{z^{-1/2}(1+\sqrt{1+4z})}{2}$ とおく。(17) から

$$F_n(0;z) = \frac{z^{\frac{n}{2}}(y^n-(-1)^n y^{-n})}{\sqrt{1+4z}}. \tag{19}$$

と表せることが容易にわかる。そこで, (18) の左辺-右辺を y を用いて表して, 整理し, (16) において, $x=y^{2n}$ と置き換えた等式を利用すると

$$\begin{aligned}(18)\text{ の左辺-右辺} = \frac{y^{-n}}{\sqrt{1+4z}}\Big(&\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k(n+1)}\binom{2r-1}{r-1+k}((y^{2n})^k-(-1)^n(y^{2n})^{-k+1}) \\ &-((-1)^{n+1}y^{2n})^{-r+1}(1-(-1)^n y^{2n})^{2r-1}\Big) = 0\end{aligned}$$

となり成立する。 □

Lemma 4.3. (i) $r \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{r}(x^k+x^{-k})\binom{2r}{r+k} = \frac{(1+x)^{2r}}{x^r}+\binom{2r}{r}. \tag{20}$$

(ii) $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$F_n(2;z) = \frac{(1+\sqrt{1+4z})^n+(1-\sqrt{1+4z})^n}{2^n}. \tag{21}$$

(iii) $r \geq 1$, $n \geq 0$, $1+4z \neq 0$ に対して

$$\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k(n+1)}z^{-kn}\binom{2r}{r+k}F_{2kn}(2;z) = (-1)^{r(n+1)}(1+4z)^r z^{-nr}F_n(0;z)^{2r}-\binom{2r}{r}. \tag{22}$$

Proof. (i) 和を２つに分けて整理すると

$$\sum_{k=0}^{r}(x^k+x^{-k})\binom{2r}{r+k} = x^{-r}\sum_{k=r}^{2r}x^k\binom{2r}{k}+x^{-r}\sum_{k=0}^{r}x^k\binom{2r}{k} = x^{-r}\sum_{k=0}^{2r}x^k\binom{2r}{k}+\binom{2r}{r}$$

となるので二項定理から成立する。(ii) (17) の右辺を $\tilde{F}_n(2;z)$ とおくと, $\tilde{F}_0(2;z)=2$, $\tilde{F}_0(2;z)=1$ であり, $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $\tilde{F}_n(2;z)=\tilde{F}_{n-1}(2;z)+z\tilde{F}_{n-2}(2;z)$ となることは容易に示せるため詳細は略とする。(iii) $y=\frac{z^{-1/2}(1+\sqrt{1+4z})}{2}$ とおく。(19), (21) から

$$F_n(0;z) = \frac{z^{\frac{n}{2}}(y^n-(-1)^n y^{-n})}{\sqrt{1+4z}},\ F_n(2;z) = z^{\frac{n}{2}}(y^n+(-1)^n y^{-n})$$

と表せることが容易にわかる。(22) の左辺-右辺を y で表して整理すると

$$(22)\text{ の左辺-右辺} = \sum_{k=0}^{r}\binom{2r}{r+k}(((-1)^{n+1}y^{2n})^k + ((-1)^{n+1}y^{2n})^{-k}) - \frac{(1+(-1)^{n+1}y^{2n})^{2r}}{((-1)^{n+1}y^{2n})^r} - \binom{2r}{r}$$

となるので, (20) において, x を $(-1)^{n+1}y^{2n}$ と置き換えた等式から (22) の左辺-右辺=0 が得られる。 □

Lemma 4.4. $r \geq 1$, $n \geq 0$ に対して次が成立する。

(i)

$$\sum_{k=0}^{n}(-z)^{-rk}F_k(0;z)^{2r} = \frac{(-1)^r}{(1+4z)^r}\Big((2n+1)\binom{2r-1}{r} + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i(n+1)}z^{-in}\binom{2r}{r+i}\frac{F_{i(2n+1)}(0;z)}{F_i(0;z)}\Big). \tag{23}$$

(ii)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k(r+1)}z^{-rk}F_k(0;z)^{2r} = \frac{(-1)^{r+n}}{(1+4z)^r}\Big(\binom{2r-1}{r} + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i(n+1)}z^{-in}\binom{2r}{r+i}\frac{F_{i(2n+1)}(2;z)}{F_i(2;z)}\Big). \tag{24}$$

Proof. (i) n についての帰納法で示す。$n=0$ のときには, 二項定理を用いることで, (23) の左辺-右辺=0 が示せる。$n-1$ まで成立したと仮定すると $(n \geq 1)$, 帰納法の仮定から

(23) の左辺-右辺

$$= (-z)^{-rn}F_n(0;z)^{2r} - \frac{(-1)^r}{(1+4z)^r}\Big(\binom{2r}{r} + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i(n+1)}z^{-in}\binom{2r}{r+i}\frac{F_{i(2n+1)}(0;z) - (-z)^iF_{i(2n-1)}(0;z)}{F_i(0;z)}\Big)$$

(11) において, (a,b,m,n) を $(0,1,2in,i)$ と置き換えた等式を利用して整理すると

$$= (-z)^{-rn}F_n(0;z)^{2r} - \frac{(-1)^r}{(1+4z)^r}\Big(\binom{2r}{r} + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i(n+1)}z^{-in}\binom{2r}{r+i}F_{2in}(2;z)\Big)$$

となるので, (22) から (23) の左辺-右辺=0 が示せる。したがって, 数学的帰納法により, (23) が成立する。(ii) (10) において, (a,b,m,n) を $(2,1,2i*n,i)$ と置き換えた等式と (22) を利用することにより, (i) と同様に示すことができるので詳細は略とする。 □

以上の準備の下で, Proposition 4.1 の証明を行う。

Proof of Proposition 4.1. (i) n についての数学的帰納法で示す。$n=0$ のときには, 直接計算することで, (13) の両辺がいずれも 0 となることは容易に示せる。$n-1$ まで, (13) が成立していると仮定する $(n \geq 1)$。帰納法の仮定を用いて, (13) の左辺-右辺を計算すると

$$(13)\text{ の左辺-右辺} = z^{-\frac{(2r-1)n}{2}}F_n(0;z)^{2r-1}$$
$$- \frac{1}{(1+4z)^{r-1}}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{(k+r)(n+1)}z^{-\frac{(2k-1)n}{2}}\binom{2r-1}{r-1+k}\frac{F_{(2k-1)(n+1)}(0;z) - z^{2k-1}F_{(2k-1)(n-1)}(0;z)}{F_{2k-1}(2;z)}$$

(10) において, (a,b,m,n) を $(0,1,(2k-1)n,2k-1)$ と置き換えた等式を適用すると

$$= z^{-\frac{(2r-1)n}{2}}F_n(0;z)^{2r-1} - \frac{1}{(1+4z)^{r-1}}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{(k+r)(n+1)}z^{-\frac{(2k-1)n}{2}}\binom{2r-1}{r-1+k}F_{(2k-1)n}(0;z).$$

したがって, (18) から, (13) の左辺-右辺=0 が得られる。よって, 数学的帰納法により, (13) の成立が示された。(ii) (23) において, r を $2r$ と置き換えて整理すれば得られる。(iii) (24) において, r を $2r+1$ と置き換えて整理すると得られる。 □

Remark 4.5. 偶数べき乗和の等式を冒頭で記載した形にするためには, (10) において, (a,b,m,n) を $(0,1,k,k)$ として得られる等式[3]

$$F_k(0;z)F_k(2;z) = F_{2k}(0;z) \tag{25}$$

と (10), (11) において, (a,b,m,n) を $(0,1,k(2n+1),k)$ と置き換えた等式を利用して得られる次の等式を用いればよい。

$$\frac{F_{k(2n+1)}(0;z)}{F_k(0;z)} = \frac{F_{2k(n+1)}(0;z) + (-z)^kF_{2kn}(0;z)}{F_{2k}(0;z)},\quad \frac{F_{k(2n+1)}(2;z)}{F_k(2;z)} = \frac{F_{2k(n+1)}(0;z) - (-z)^kF_{2kn}(0;z)}{F_{2k}(0;z)}.$$

[3] この等式は, 冒頭で述べた $f_nL_n = f_{2n}$ の拡張となっている。

また, (23) と (24) の両辺の和 (resp. 差) を計算して, n を $2n$ (resp. $2n+1$) と置き換えて整理し, (12) を利用すると, 次が成立する。

Corollary 4.6. $r \geq 1$, $n \geq 0$ に対して次が成立する。

$$\sum_{k=0}^{n} z^{-2rk} F_{2k}(0;z)^{2r} = \frac{(-1)^r}{(1+4z)^r}\Big((2n+1)\binom{2r-1}{r} + \sum_{i=1}^{r}(-1)^i z^{-2in}\binom{2r}{r+i}\frac{F_{2i(2n+1)}(0;z)}{F_{2i}(0;z)}\Big). \tag{26}$$

$$\sum_{k=0}^{n} z^{-r(2k+1)} F_{2k+1}(0;z)^{2r} = \frac{1}{(1+4z)^r}\Big(2(n+1)\binom{2r-1}{r} + \sum_{i=1}^{r} z^{-i(2n+1)}\binom{2r}{r+i}\frac{F_{2i(2n+2)}(0;z)}{F_{2i}(0;z)}\Big). \tag{27}$$

また, (13) において, n を $2n$ (resp. $2n+1$) と置き換えてから, z^m (resp. $z^{(2m+1)/2}$) ($m \in \mathbb{Z}$) の箇所のみを抜粋して整理すると次が得られる。

Corollary 4.7. $r \geq 1$, $n \geq 0$ に対して次が成立する。

$$\sum_{k=0}^{n} z^{-(2r-1)k} F_{2k}(0;z)^{2r-1} = \frac{(-1)^{r+1}}{(1+4z)^{r-1}}\sum_{i=1}^{r}(-1)^i\binom{2r-1}{r-i}\frac{F_{2i-1}(0;z) - z^{-(2i-1)n}F_{(2i-1)(2n+1)}(0;z)}{F_{2i-1}(2;z)}. \tag{28}$$

$$\sum_{k=0}^{n} z^{-(2r-1)k} F_{2k+1}(0;z)^{2r-1} = \frac{z^{r+n}}{(1+4z)^{r-1}}\sum_{i=1}^{r} z^{-i(2n+1)}\binom{2r-1}{r-i}\frac{F_{2(2i-1)(n+1)}(0;z)}{F_{2i-1}(2;z)}. \tag{29}$$

5 超幾何級数への応用

以下, 複素数 a, 非負整数 k に対して, ポッホハマー記号 $(a)_k$ と , 2 以上の整数 r, 複素数 $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_{r-1}$ に対して, 超幾何級数 ${}_rF_{r-1}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots b_{r-1} \end{matrix}; z\right)$ を

$$(a)_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k=0, \\ \prod_{i=0}^{k-1}(a+i) & \text{if } k>0, \end{cases} \quad {}_rF_{r-1}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_{r-1} \end{matrix}; z\right) = \sum_{k\geq 0}\frac{z^k\prod_{i=1}^{r}(a_i)_k}{k!\prod_{i=1}^{r-1}(b_i)_k}$$

で定義する。まず, フィボナッチ数 f_n ($n \geq 1$) については, 次の超幾何級数を用いた表示が知られている。

$$f_n = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}+1 \\ -n+1 \end{matrix}; -4\right).$$

特に, $F_n(0;z)$, $F_n(2;z)$ については, 超幾何級数を用いて次のように表示できる。

Lemma 5.1. $n \geq 1$ に対して

$$F_n(0;z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}+1 \\ -n+1 \end{matrix}; -4z\right),\ F_n(2;z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2} \\ -n+1 \end{matrix}; -4z\right). \tag{30}$$

Proof. どちらの等式も, 右辺と左辺が $n=1,2$ で一致し, (2) の関係式を満たすことが, ${}_{r+2}F_{r+1}$ ($r \geq 0$) についてのよく知られた隣接 3 項間関係式 (cf. Krattenthaler [1] (3.3)),

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, x_1, \ldots, x_{r+1} \\ b, y_1, \ldots, y_r \end{matrix}; z\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1, x_1, \ldots, x_{r+1} \\ b+1, y_1, \ldots, y_r \end{matrix}; z\right) + \frac{(a-b)z}{b(b+1)}{}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1, x_1+1, \ldots, x_{r+1}+1 \\ b+2, y_1+1, \ldots, y_r+1 \end{matrix}; z\right) \tag{31}$$

の $r=0$ の場合を利用することで容易に示せるため、詳細は略とする。 □

そこで, (10) 及び (11) において (a,b,m,n,z) を $(0,1,m,n,-\frac{z}{4})$ に置き換えた等式, (10) において (a,b,m,n,z) を $(2,1,m,n,-\frac{z}{4})$ に置き換えた等式を超幾何級数を用いて表し, 整理した等式の z^{n+k} ($0 \leq k \leq \frac{m}{2}$) の係数を比較して得られる等式を, さらに一般化すると次が成立する。

Proposition 5.2. $n \geq 0$ に対して次が成立する。

(i)

$$ {}_4F_3\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, a, b \\ -n+1, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b+1}{2} \end{matrix}; 1\right) = \frac{(a)_n + (b)_n}{(a+b)_n}. \tag{32} $$

(ii)

$$ {}_4F_3\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, a, b \\ -n, \frac{a+b+1}{2}, \frac{a+b}{2}+1 \end{matrix}; 1\right) = \frac{(a)_{n+1} - (b)_{n+1}}{(a-b)(a+b+1)_n}. \tag{33} $$

(iii)

$$ {}_4F_3\left(\begin{matrix} -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, a, b \\ -n+1, \frac{a+b+1}{2}, \frac{a+b}{2}+1 \end{matrix}; 1\right) = \frac{(a-b+n)(a)_n + (a-b-n)(b)_n}{(a-b)(a+b+1)_n}. \tag{34} $$

Proof. いずれの等式も, (31) の $r=2$ の場合の等式を利用することで, n についての帰納法で証明できる。詳細は略とする。 □

なお, (10) について, z^{n+k} $(0 \leq k \leq \frac{m}{2})$ ではなく, z^k $(0 \leq k \leq n-1)$ の係数を比較して, a を 0 (resp. 2) としたときに $(-\frac{n}{2}, m+n-k+1, k)$ (resp. $(-\frac{n}{2}, m+n-k, k)$) を (b, c, n) と置き換えて整理すると, [3] の 0005, 0006 として掲載された等式が得られる。また, (11) において (a, b, m, n, z) を $(0, 1, m, n, -\frac{z}{4})$ を超幾何級数を用いて表し, 整理した等式の z^k $(0 \leq k \leq n-1)$ の係数を比較して得られる等式を, さらに一般化すると次が成立する。

Proposition 5.3.

$$ {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, a, a+\frac{1}{2}, b \\ 2a, \frac{b-n+1}{2}, \frac{b-n}{2}+1 \end{matrix}; 1\right) = \frac{(b-n)(2a-b)_n}{(b+n)(-b+1)_n}. \tag{35} $$

Proof. まず, 一般に

$$ a(b-c)(c+k)(d+k) - c(a+k)(b-d)(c+k) + c(a+k)(b+k)(c-d) - k(a-c)(b-c)(d+k) = 0 $$

であることを利用すると, ${}_{r+3}F_{r+2}$ $(r \geq 0)$ の隣接 4 項間関係式

$$ \begin{aligned} &{}_{r+3}F_{r+2}\left(\begin{matrix} a, b, x_1, \ldots, x_{r+1} \\ c, d, y_1, \ldots, y_r \end{matrix}; z\right) \\ &= \frac{c(b-d)}{d(b-c)}{}_{r+3}F_{r+2}\left(\begin{matrix} a+1, b, x_1, \ldots, x_{r+1} \\ c, d+1, y_1, \ldots, y_r \end{matrix}; z\right) - \frac{b(c-d)}{d(b-c)}{}_{r+3}F_{r+2}\left(\begin{matrix} a+1, b+1, x_1, \ldots, x_{r+1} \\ c+1, d+1, y_1, \ldots, y_r \end{matrix}; z\right) \\ &\quad + \frac{b(a-c)z\prod_{i=1}^{r+1} x_i}{cd(c+1)\prod_{i=1}^{r} y_i}{}_{r+3}F_{r+2}\left(\begin{matrix} a+1, b+1, x_1+1, \ldots, x_{r+1}+1 \\ c+2, d+1, y_1+1, \ldots, y_r+1 \end{matrix}; z\right) \end{aligned} \tag{36} $$

を z^k の各係数を比較することで証明できる。したがって, (36) の $r=1$ の場合の $(a, b, x_1, x_2, c, d, y_1)$ を $(-n, a, a+\frac{1}{2}, b, 2a, \frac{b-n+1}{2}, \frac{b-n}{2}+1)$ と置き換えた等式を利用することで, (35) を n についての数学的帰納法で証明できる。詳細は略とする。 □

参考文献

[1] C. Krattenthaler, "A Systematic List of Two- and Three-term Contiguous Relations for Basic Hypergeometric Series", available at http://www.mat.univie.ac.at/~kratt/artikel/contrel.html.

[2] オンライン整数列大辞典, https://oeis.org/

[3] http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric4F3/03/02/09/