論理とことば
── 小免専門科目「算数」における試み ──

Logic and Words
── An experimental lecture on the subject "Arithmetic research"──

門　田　良　信
KADOTA Yoshinobu
（和歌山大学教育学部数学専修）

小学校教師の免許状取得に必要な専門科目（教科共通）の１つである「算数」の中で,「論理とことば」と題する３回程度の講義を行ったことがある。内容は, 命題とその逆, 裏および対偶を集合の包含関係におきかえ, それを応用して算数教材や日常のことば（標語や警句）を考えることである。目的は, 受講者が命題の意味を詳細に理解し, 論理的に思考することの楽しさに気づくことにあった。

このような数学から言葉の世界に踏み込んだ講義をすることは, 自分の専門を大きく逸脱した大冒険であり, 私は特別な注意を払ったつもりであった。ところが意に反して, 学生からは面白くない講義として受け取られた。「なぜ面白くないのか。」,「この内容は「算数」という科目に適切でないのか。」について考えることが, これを書く動機となった。この小論の大部分は, 上記の風変わりな講義内容を説明したものである。そのことで得た結果は最後のあとがきで述べている。

キーワード：　論理的思考, 命題, 集合, ベン図, 対偶,「算数」, 日常のことば

1.　はじめに

この小論「論理とことば」の第２節から４節までは, かって私が行った講義「算数」のノートの一部を少し加筆修正したものである。それはおよそ３回の講義に相当する。

講義目的の第１は, 論理的に思考するための１つの基本的方法を提示し, 受講者がそうすることのよさや楽しさを感得できるようにすることにある。目的の第2は, 小学校算数に現れる様々な数や図形を集合的見方によって整理し, 教材研究を行う場合の１つの視点を与えることにある。第２の目的については, あとがきでもう少し述べることにする。

教育学部で行う「算数」について少し説明をしよう。小学校教師の免許状を取得する場合には, 専門科目として教科共通, 教職共通, 教科または教職の科目の中から必要な科目を履修しなければならない。小学校教科には, 国語, 社会, 算数, 理科, 生活, 音楽, 図画工作, 体育, 家庭の９科目があり, 教科共通科目群はこれらの科目に対応したものとなっている。「算数」はその１つである。「算数」は選択科目であり, 文科系理科系の別なく２回生以上の学生を対象としている。

この小論の内容と構成を述べておこう。次の第２節では, 命題と集合の基本関係について説明する。つまり, 条件 p, q に対して「 p ならば　q である。」という命題は「 p を満たす任意のものは　q を満たすものである。」と言い換えられるから, これは２つの集合の包含関係で表される。さらに集合の演算を考えることにより, この命題の逆, 裏および対偶命題も, p, q が複数の条件からなる場合にも, これらは集合の包含関係で表される。それらの結果はベン図を使って可視化される。

この方法の大部分は高校の「数学 A」の教科書にあるが, ここでは様々な現象に関する文章も考慮の対象とする。そのようなものは, 数学的事実の前ではあいまいさを含んでいるのであるが, あえて命題といえるかどうかを考える。

第３節では, 第２節で得られたベン図による表現を算数に応用する。最初に，様々な四角形の概念や，実数の概念をベン図で表す。次に, 包除定理を導いてある種の問題の解法として役立つことを見る。

第４節では, 算数あるいは数学で使われる言葉や用語について, その意味や正しい用法について考える。さらに, 算数以外の身の回りで語られる標語や警句のいくつかについて, その意味を論理的に考察する。最後に演習問題として, 2, 3 の論理的問題を付け加えた。

第５節は,「あとがき」に当てられている。この節の最後で述べるこの小論の目的に関する私の考えや反省を箇条書きに記し, 論理的思考力を養成することの難しさについて感想を付け加えた。

第２節の内容は, 数学を勉強した人だったら誰もが知っている事柄である。数学の研究者は皆この種の応用をしていると思っていたのだが, 私の思い過ごしなのかもしれない。仲間内でこのことを話すことはない。おそらく, 数学的なよい方法であるが, 身のまわりで使われる言葉は大変複雑で応用の結果に自信が持てないと思っているのであろう。

第３節の後半以下の応用が, 現実の生活に役立てようと試みた部分である。我流の考え方であると言う非難はある程度覚悟している。しかし, 私の人生にあって最も役に立った基本的な考え方なのである。これを出発点として, 私は何度も難しい文章を理解することができたし, ある時には人の話しの中にある非論理性を感得できたし, １つ１つの言葉の持つ意味の重要性も学んだ。

しかし, その場で解ったことに満足してそのような経験を, 私はほとんど忘れている。結局, 算数という科目に合わせてそれに応用したものと, 昔の記憶に頼った言葉について語る以外になかった。私の結果に色々と誤りがある可能性も覚悟している。読者は自分で考えて自分なりの結論を出してもらえればよい。元々私の個人的結果に過ぎないものである。

私の「算数」の学習は, 小学校教師が集まったある講習会の講師を務めたことに始まる。何を話すべきかと悩んで, 結局「論理とことば」をその第１章とした。そして受講生からは, その他の章の内容と比べれば割と好感を持たれたと感じた。

それから ２年後に,「算数」を講義できることになった。私の講義ノートは, 講習会のときと比べると充実したものとなっていた。

ところが意に反して, 学生は「論理とことば」の章が最も面白くない内容であると答えた。学期末のアンケートにそれが出ていた。２年位やって私はこの講義を止めた。やる意思がくじけた。

ちなみに, 学生にとって最も人気の高いのは模擬授業である。先生役の学生は張り切ってやる。次に人気の高いのは「授業例」の紹介と解説である。「最も役に立つ。」と思うらしい。しかし, 私の講義では模擬授業をあまりやらないし, 授業例も１回の講義で済ませてしまう。様々な事情はあるが, ２回生段階では算数を中心とした基礎的な説明をすることに時間を取られてしまうことが, 最大の理由である。「算数」の講義で最も難しいのは, どんな題目を選んで何回位でやるかとういことである。

この小論を書く意図は, 次のことについて, 自分で再考したいと思い, また読者のご教示をいただければ幸いと思ったからである。

(1) 学生はなぜ「論理とことば」を面白くないと思うのか。面白くするための改善の手はないのか。
(2) 「論理とことば」は「算数」の講義としてふさわしくないのか。もしそうならどのような科目でやるべきか。
(3) 第４節の記述内容を, 正しいと保障してくれる理論やそのことに関する文献がどこかにないか。あるいは「ことば」に関する部分で, 私は誤った適用をしていないか。

2. 命題と集合

(A) 命題のベン図表現

「命題」にしろ「集合」にしろ, 正確に述べようとすると細井 [7] のように数学基礎論のお世話になって, 結構難しいことになる。そのような難しさを避けて, ここでは高校の「数学 A」あるいは赤 [3] で言われているものを考えよう。実用的にはそれで困らない。

式や文章で表された２つの条件 p, q によって,

(2.1)　「p ならば q である。」あるいは
　　　「p は q である。」

と表され, さらに, それが正しいか正しくないかが明確に決定できるものを <u>命題</u> とよぶことにする。(2.1) を記号で

(2.2)　$$p \Longrightarrow q$$

と記し, p を 命題の <u>仮定</u>, q を <u>結論</u> という。また, 正しい命題を <u>真</u> であるといい, 正しくない命題を<u>偽</u>であるという。

命題が真であることを示すにはその根拠を説明する必要があるが, 偽であることを示すには命題が成立しない例を１つあげるだけでよい。例えば「 a が実数ならば $a^2 \geqq 0$ である。」は真の命題である。また「$x^2 = 1$ ならば $x = 1$ である。」は, $x = -1$ かも知れないから偽の命題である。「りんごは赤い。」は, 人によっては「黄色いりんごもあるよ。」ということになり, 真偽がつけかねるから命題ではない。

問 **2.1.** 次の命題の真偽をいえ。ただし真であることを証明をする必要はない。

(i) $2 > 5$
(ii) $y = 2x + 1$ は点 $(0, 1)$ を通る直線を表す。
(iii) ２つの奇数の積は奇数である。
(iv) 平面上の ３ 点を直線で結ぶと三角形ができる。

問 **2.2.** 次の文は命題と言えるか。

(i)　人間はいつかは死ぬ。
(ii)　イルカは犬よりも知能が進んでいる。
(iii)　1/50000 よりも小さい確率で起こる事柄は無視してよい。
(iv)　太陽は地球の周りを回っている。

問 1 は数学的命題を扱っているから, 真偽の判定が易しい。問 2 は現象に関する命題であり, それは常に数学的事実よりもずっと複雑だから, 真偽の判定がつけ難くなる。詳細は第 4 節で述べることにして, この節ではそのことにあまり神経質にならないことにしよう。（授業では (i), (iv) は命題, (ii), (iii) は命題でないとしている。）

任意のものの集まりで, 集まっているものの範囲が明確であり, その範囲内から任意に 2 つをとって a, b と表すとき a と b が等しい ($a = b$) かあるいは等しくない ($a \neq b$) かのどちらか一方が明確に定まるとき, その集まりを 集合 とよぶ。以後 集合を $A, B, \cdots$ 等と表す。

任意の集合を A, 考え得る任意のものを x と表すと, x が A に 属する(x が A の範囲内にある) 場合には

$$x \in A$$

と表し, x は A の 元 または 要素 という。($\in$ は *element* の e の意味。) 属さない場合には $x \notin A$ と表し, x は A の元 (要素) ではないという。

2 つの集合 A, B において, 任意の $x \in A$ をとれば $x \in B$ となるとき, つまり, A の元ならば B の元となるとき, A は B の 部分集合 あるいは A は B に含まれる といって

$$A \subseteq B \quad \text{または} \quad B \supseteq A$$

と表す。 $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ ならば, つまり A と B が互いに相手の部分集合となっていれば, A と B は 等しい といって

$$A = B$$

と表す。とくに考察の対象となるすべてのものの集まりを 全集合 といって以後 $\overset{\text{オメガ}}{\Omega}$ で表す。また 1 つの元も範囲内に含まない集合を便宜上考えて, 空集合 といい $\emptyset$ と表す。

全集合 Ω とその部分集合 A の関係は ベン図 とよばれる図を使って視覚的に表される。次の図 1 は, Ω と $A \subseteq \Omega$ かつ $A \neq \Omega$ となる A を表したものである。Ω の中には (描いていないが) Ω の元がぎっしり詰まっているものとする。その一部の元からなる A は斜線で表現している。

ベン図では包含関係だけを表すものとし, 形や面積は無視される。したがって Ω を円や楕円で描いても, A を長方形やその他の図形で表しても何ら差し支えない。

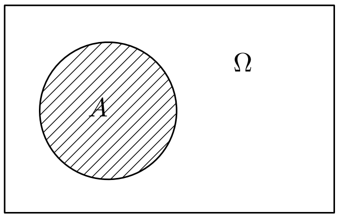

図 1

Ω の部分集合の中で条件 p を満たすものをすべてその元とし, それ以外のものを一切含まないものを p の集合 という。

例えば, 条件 p_1 を「自然数」とするとき, p_1 の集合を P_1 とすると P_1 は自然数の集合となる。条件 q_1 を「実数」とするとき, q_1 の集合 Q_1 は実数の集合となる。もう 1 つ例をあげれば, 条件 p_2 を「日本人」とするとき, p_2 の集合 P_2 は日本人全体の集合となる。条件 q_2 を「人間」とするとき, q_2 の集合 Q_2 は人間全体の集合つまり全人類となる。いずれの場合にも $P_i \subseteq Q_i$ $(i = 1, 2)$ が成り立つ。

また, 条件 p の集合は中括弧の中にその元を列挙するかあるいは $\{\cdot \in \Omega; \text{条件}\, p\}$ の形で表される。したがって条件 p_3 を「奇数」とすれば p_3 の集合 P_3 は

$$P_3 = \{\, 1, 3, 5, \cdots\cdots \} \quad \text{あるいは}$$
$$P_3 = \{\, n \in \boldsymbol{N};\, n = 2k - 1,\, k \in \boldsymbol{N} \,\}$$

等と表される。ただし, $\boldsymbol{N}$ は自然数の集合とする。

命題の表現 (2.2) と集合との間の関係を考えよう。条件 p の集合を P, 条件 q の集合を Q と表しておく。(2.2) は 「 考察の対象となる任意のものが, もし p を満たせば q を満たす」ことを意味するから, 集合の包含関係を使って

$$P \subseteq Q \tag{2.3}$$

と表される。(2.3) はベン図では次のように表される。

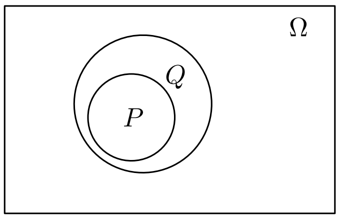

図 2

例えば問 2.1(iv) では, 平面上の任意の n 個の点を線分で結んでできる図の集合を Ω, 3 点を線分で結んでできる図形の集合を P, すべての三角形の集合を Q とすると, P と Q について (2.3) が成り立つかどうかを問うていることになる。このような表現は面倒くさいと思うかもしれないが, 慣れれば解りやすい表現であることに気づくであろう。

(B) 命題の裏, 逆, 対偶

任意の条件 p, q から次のような条件が考えられる。

(2.4)
(i) p または q,
(ii) p かつ q,
(iii) p でない (p の否定)

(iii) の p でない ことを示す条件を以後は $\overline{p}$ と表す。

全体集合を Ω, 条件 p, q の集合をそれぞれ P, Q とするとき, $P \cup Q$ を P と Q の 和集合(または結び), $P \cap Q$ を 積集合(または 交わり), P^c を P の 余集合(または 補集合) とよび, それぞれ次で定義する。

(i) $P \cup Q = \{x \in \Omega;\ x \in P$ または $x \in Q\}$

(ii) $P \cap Q = \{x \in \Omega;\ x \in P,\ x \in Q\}$

(iii) $P^c = \{x \in \Omega;\ x \notin P\}$

ただし, (ii) の右辺のコンマ「 , 」は「かつ」を意味している。

このとき, 和 $P \cup Q$ は (2.4)(i) の p または q を満たすものの集合, 積 $P \cap Q$ は (ii) の p かつ q を満たすものの集合, 余集合 P^c は (iii) の p を満たさないものの集合, つまり $\overline{p}$ の集合を表すことになる。($\overline{p}$ の集合は $\overline{P}$ と表した方が自然かもしれない。しかしこの記号は数学ではしばしば別の意味に用いるので, ここでは P^c と表しておこう。) これらの集合は次のベン図によって描かれる。

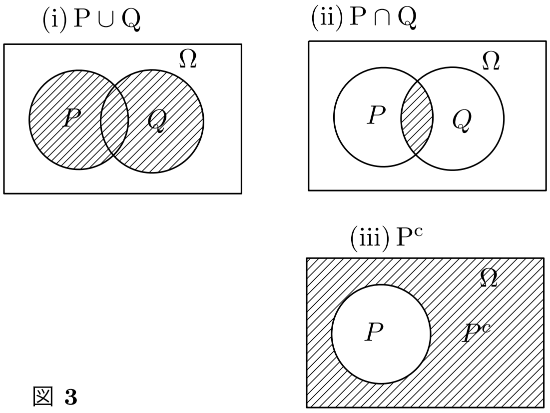

図 3

特別な場合として $P \cap Q$ が Ω の元を 1 つも含まないならば $P \cap Q = \emptyset$ となる。このとき $P \cup Q$ は次の図 4 で表される。$P \cap Q = \emptyset$ は図に表せない。

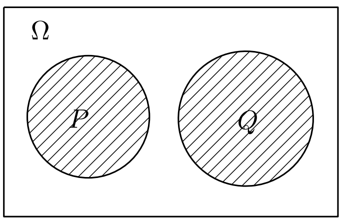

図 4

上記の (i), (ii), (iii) を使ってもっと複雑な形の条件を表すことができる。例えば,「p でないか q でない」を表す集合は

(2.5) $P^c \cup Q^c = \{x \in \Omega;\ x \notin P$ または $x \notin Q\}$

と表される。ベン図で書くと次の図 5 となる。

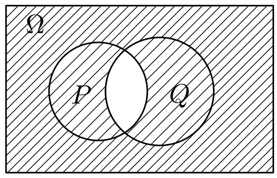

図 5

問 **2.3.** (2.5) に習って次の条件を表す集合を示し, ベン図によって表せ。

(i) p でありかつ q でない。
(ii) p でなくかつ q でもない。
(iii) p でありかつ q でないか, そうでなければ q でありかつ p でない。(p か q のどちらか一方だけを満たす。)

2 つの命題のうち, 一方が成り立てば他方も必ず成り立つとき, つまり 2 つとも同時に成り立つか成り立たないかが決まるとき, これらを同値な命題とよぶ。

和, 積, 余集合 ($\cup$, $\cap$, $\cdot^c$) の演算に関して次の公式が成立する。ベン図を描くと簡単に納得できる。しかし, きちんとした証明の見本も 1 つだけ与えておこう。

定理 2.1. A, B, C を Ω の任意の部分集合とするとき, 次の包含関係が成り立つ。

(i) $A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B,$
$A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B$

(ii) $A \subseteq B$ は, $A \cup B = B$ と同値であり, $A \cap B = A$ とも同値である。

(iii) (結合法則) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iv) (交換法則) $A \cup B = B \cup A,$
$A \cap B = B \cap A$

(v) (分配法則)
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(vi) $(A^c)^c = A$

(vii) (ド・モルガンの法則)
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

証明 念のために (vii) の第 2 式だけを示す。集合に関する等号の定義により, $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ かつ $(A \cap B)^c \supseteq A^c \cup B^c$ を示せばよい。

$x \in (A \cap B)^c$ を任意にとる。
$\Longrightarrow x \notin A \cap B$ となる。
$\Longrightarrow$ ($x \in A$ かつ $x \in B$) とはならない。
$\Longrightarrow x \notin A$ または $x \notin B$ となる。
$\Longrightarrow x \in A^c$ または $x \in B^c$ となる。
$\Longrightarrow x \in A^c \cup B^c$ となる。

以上より, $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ がいえる。この証明を逆にたどることによって, 任意の $x \in A^c \cup B^c$ をとると $x \in (A \cap B)^c$ も示される。よって $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$ も示された。 □

問　**2.4.** 次の図 6 の 3 つのベン図の斜線部で示される部分集合について, 成り立つ関係式を 1 つ示せ。

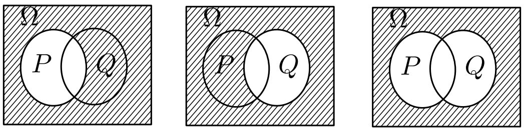

図 **6**

次の問題は三浦 [10] によるものである。和歌山大学の企画「あったらいいなこんな授業」で学生に推薦された本である。私もうっかりミスをしたので答えも書いておこう。

問　**2.5.** 次の文を否定した文を書け。

「この文を構成する文字の数は十九である」

答えは, 「その文を構成する文字の数は十九ではない」。問題文の「この文」と答えの「その文」が同じものを指していなければならない。代名詞も気をつけなければならない。

命題「p ならば q である。」に対して, 仮定と結論を入れかえてできる命題

「 q ならば p である。」　$(q \Longrightarrow p)$

をもとの命題の 逆 (命題) という。また, p, q を共に否定してえられる命題

「 p でないならば q でない。」　$(\overline{p} \Longrightarrow \overline{q})$

をもとの命題の 裏 (命題) という。

もとの命題が真であっても, 逆や裏は真であるとは限らない。そのことは $P \subseteq Q$ が成り立っていてもそれから $Q \subseteq P$ や $P^c \subseteq Q^c$ が導かれるとは限らないことから解る。

問　**2.6.** 次の命題の逆と裏をいえ。またそれらの真偽をいえ。

(i)　自然数 a と b の積が偶数ならば, a または b は偶数である。
(ii)　実数 a が $a \neq 0$ ならば $a^2 > 0$ である。
(iii)　a^2 が無理数ならば a は無理数である。
(iv)　三角形では 2 辺の和は他の 1 辺より長い。

命題「 p ならば q である。」に対して, 仮定と結論を否定しさらにそれらを入れかえてできる命題

「 $\overline{q}$ でないならば p でない。」　$(\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$

をもとの命題の 対偶 (命題) という。(2.3) が成り立つとき

$$Q^c \subseteq P^c$$

は常に成り立つから, 対偶の真偽はもとの命題のそれに常に一致する。

問　**2.7.** 問 2.6 の命題の対偶をいえ。またその真偽を言え。

問　**2.8.** 一般に, 「p ならば q である。」という命題の裏命題の対偶命題は, もとの命題の逆となることを説明せよ。またこのことからもとの命題の真偽に関係なく, 裏命題と逆命題は常に真偽をともにすることを説明せよ。

(2.1), (2.2) において, p, q がともに条件ではなくて命題の形をとる場合がある。そのときは p, q の真偽から全体の命題の真偽が決まる。

p, q を命題とするとき, $p \Longrightarrow q$ を考える。p が真のとき, q が真ならば全体の命題は真である。q が偽ならば全体の命題は偽である。

命題 p が偽ならば q の真偽にかかわらず全体の命題は真である。これは論理的には, 偽の命題 p から導かれる結果 q は無意味な結論となるから, 全体の命題としては真と決めただけに過ぎない。(私流には, p が偽, q が真のとき全体の命題は真であることは納得できる。p も q も偽のときは, 「$p \Longrightarrow q$」の対偶は, 「偽の命題 q が否定されるならば, 偽の命題 p は否定される。」と解釈されるから, これは真とよぶべきであろう。)

問　**2.9.** 次の命題の真偽をいえ。

(i)　$\sqrt{4} = 2$ ならば　$3 > 5$ である。
(ii)　$10^2 < 99$ ならば　$3 \geqq 5$ である。
(iii)　太陽が地球の周りを回っているならば, 地球は月の周りを回っている。

3. 算数とベン図

現行の算数には「集合」に関する記述はないし, 「集合」を普通の授業で扱うことはないであろう。しかし子どもがものの集まりに着目して考えることはある程

度必要となる。算数おいて, 諸概念の形成, それらの関係や分類, 一般化や統合化は常に行われおり, それに伴った概念操作 $x \in A$, $x \notin A$, $A \subseteq B$, $A \cap B = \emptyset$ や推移律 $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば $A \subseteq C$ 等は明示されなくても使われている。

(A) 算数における概念の整理

四角形の概念, 直角三角形と二等辺三角形の関係, 整数と小数の関係, 小数と分数の関係等を考えてみると, 集合の概念の大切さは理解できるであろう。教師の素養としてこの節で述べる事柄は必要であると思う。

例 **3.1.** 四角形すべての集合を Ω とすると, 台形, 平行四辺形, 長方形, ひし形, 正方形は, それぞれ Ω の部分集合として次のベン図で表される。

Ω : 四角形

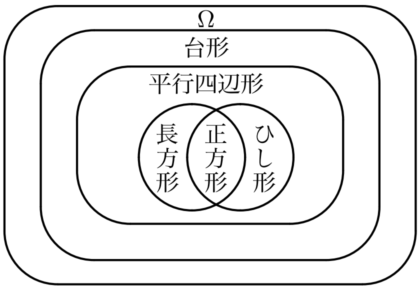

図 **7**

例 **3.2.** 実数全体の集合を Ω とするとき, 無理数, 正の有理数, 負の有理数, 0, 自然数の集合は, Ω の部分集合としてそれぞれ次のベン図で表される。

Ω : 実数

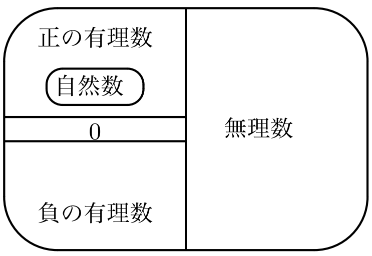

図 **8**

図 **8** (実数の分類) 実数は有理数と無理数に分かれる。有理数は, 正の数, 0, 負の数に分かれる。無理数は正の数と負の数に分かれる。(有理数は分子分母が共に整数である分数で表される数であり (ただし分母 0 を除く), 小数で表すと有限桁の小数あるいは循環小数となる数である。) 自然数の集合は正の有理数の部分集合となる。

問 **3.1.** となり合った 1 組の角が等しく, それにはさまれない 1 組の対辺が等しい四角形を等脚(とうきゃく)台形とよぶ。台形, 等脚台形, 平行四辺形, ひし形, 長方形の各集合の関係をベン図で示せ。

問 **3.2.** 三角形の集合の中で, 鈍角三角形, 鋭角三角形, 直角三角形, 二等辺三角形, 正三角形の各集合はどんな関係にあるかをベン図で示せ。

(B) 包除定理

図形の面積の面白い考え方として包除定理とよばれるものがある。いま, 全集合 Ω, その部分集合 A, B のベン図を描いて $A \cup B$ の面積を考えると

(3.1)
$$\begin{aligned}&(A \cup B)\,\text{の面積}\\&= A\,\text{の面積} + B\,\text{の面積} - (A \cap B)\,\text{の面積}\end{aligned}$$

が成り立つことが解る。(図 3 (i), (ii) 参照。) この両辺を全集合 Ω の面積で割ると, 面積について次が成立する。

$$\begin{aligned}&(A \cup B)\,\text{の}\,\Omega\,\text{に対する面積の割合}\\&= A\,\text{の}\,\Omega\,\text{に対する面積の割合}\\&+B\,\text{の}\,\Omega\,\text{に対する面積の割合}\\&-(A \cap B)\,\text{の}\,\Omega\,\text{に対する面積の割合}\end{aligned} \tag{3.2}$$

となる。ところで Ω の面積をあらかじめ 1 にとっておくと, 式 (3.2) で「全体を 1 としたときの割合」となる。これは確率のことだから結局

$$\begin{aligned}&(A \cup B)\,\text{のおこる確率}\\&= A\,\text{のおこる確率}\\&+B\,\text{のおこる確率}\\&-(A \cap B)\,\text{のおこる確率}\end{aligned} \tag{3.3}$$

が成り立つことが解る。

$P(A)$ を A の面積, A の Ω に対する割合または A が起こる確率とすると, (3.1), (3.2), (3.3) はともに

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{3.4}$$

と表されることになる。このような等式が成り立つことを 包除定理 とよぶ。

Ω が n 個の元からなるとき, その各々の元の占める面積, 割合, 確率を $\frac{1}{n}$ と考えてよい場合がよくある。

問 **3.3.** 運動場で 16 人の子供が遊んでいます。帽子をかぶっている子は 9 人, 運動服を着ている子は 10 人です。そのうち, 帽子をかぶり運動服を着ている子は 5 人です。帽子をかぶってなくて運動服も着ていない子は何人いるでしょう。

問　**3.4.** ある町で A 新聞を購読している世帯は 45 パーセント, B 新聞を購読している世帯は 50 パーセントである。両方とも購読している世帯は 8 パーセントとするとき, 両方とも購読していない世帯は何パーセントあるか。

問　**3.5.** (i)　全集合 Ω の部分集合 A, B, C について次の等式が成り立つことを, (3.4) を用いて示せ。

$$\begin{aligned}&P(A\cup B\cup C)\\ &=P(A)+P(B)+P(C)\\ &-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)\\ &+P(A\cap B\cap C)\end{aligned} \tag{3.5}$$

(ii)　(3.5) の意味を次のベン図を使って説明せよ。

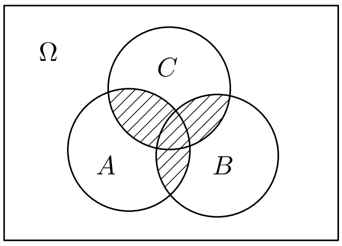

図 **9**

次のような問題も包除定理の応用として考えることができる。

問　**3.6.**　次の図 10 は正方形と円弧によってできている。正方形の 1 辺の長さを 1 とするとき, (i), (ii) の斜線部の面積を求めよ。

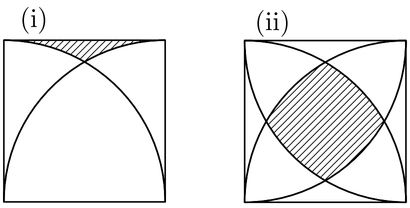

図 **10**

4. ことばと論理

(A)　算数 · 数学のことば

ここでは第 2 節の結果を時々参考にしながら, 算数 · 数学の授業の中や教室で使われる言葉について考えてみよう。

次の (i)(c), (iii)(a), (f), (iv)(b) は細井 [8, 9] を参照させてもらった。

(i)　あいまいな表現

(a)　「これを倍にすると,⋯。」

(b)　「全部の数が 0 でないとすると,⋯。」

(c)　「答えは 3 と 2 か 5 になるはずだ。」

(d)　「 a と b は小数にはならない。」

(ii)　許される表現

(a)　「角 BAC は 60 度。」

(b)　「円の面積は 12.56 cm^2。」

(c)　「三角形の面積 = 底辺 × 高さ ÷ 2 」

((c) は「底辺の長さ」とすべきだと思う。大抵はそうなっている。(教科書 [4, 6] 参照。) 1 社だけ上記の記述となっている。)

(iii)　同語異義 (算数　数学で使うときは, 普通のときとは意味が異なるかズレる場合がある。)

(a)　「 A または B である。」

(b)　「 B は A の 一 部である。」

(c)　「 一般に ⋯⋯ 」

(d)　「 かってな（点）」

(e)　「 2 点 A, B を結ぶ直線 」

(f)　「 直線 ℓ 上の点 」

(iv)　否定について

(a)　「 反対 」と否定

「 1 より大」の反対は 「 1 より小」(?)

(b)　「 逆に 」と否定

「 A が B であることを示すために,

逆に A は B でないと仮定しよう。」(?)

(c)　「 (A または B または C) の否定」は

「A でなくかつ B でなくかつ C でない」

「 (A かつ B かつ C) の否定」は

「A でないかまたは B でないか

または C でない 」

((iv)(c) では定理 2.1(vii) を適用する。)

(iv)　その他の注意

(a)　時刻と時間 (列車の時刻表, 週間時間割)

(b)　「 円周は 12.56 cm。」

(c)　「 3 は 2 よりも小さくない」

⇒「 3 は 2 より大きいか等しい 」

⇒「 $3 \geqq 2$ 」

(d) 「それぞれ」

((c) は, $3 \geqq 2$ は誤りの式で $3 > 2$ が正しいと言う学生がいるので。)

授業では正確に表現してほしいが, それが全てではない。正しい用法を心がけるあまりに, 解り難かったり, 回りくどい表現になれば何にもならない。言葉に気をつけた日常生活での心配りが必要となる。（私自身もできていないが･･･。）

(B) 日常の言葉と論理

日常の言葉は, 算数 · 数学の言葉に比べてはるかに複雑である。しかし様々な文章については対偶や場合によっては裏, 逆なども考えることによってその意味がよく理解できる場合もある。この節の処理や例は強引だと思うかも知れないが, 意味が分からないよりも随分ましだと考える。ただし次の (i), (ii) は念頭においておこう。

(i) 真偽の明確さはあとで考えればよい。あなたにとって真であれば, あなたにとってだけ真である対偶が得られるだけである。

(ii) 論理的に「p ではない。」としたときに, 日常の言葉では「p である。」と「p でない。」との間に判定できない領域ができることがある。その広さを前後の文脈から考えておく必要がある。例えば「好きでもなく嫌いでもない。」と言う場合はありうる。次の図 11 のようになる。

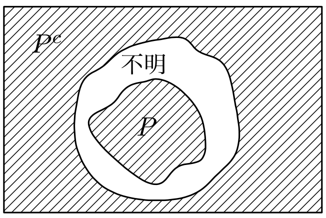

図 **11**

全体の意味をつかむために, 必要ならば次の処理を行う。

(i) (2.2) において p は q よりも前の時刻に関する事柄を述べているときがある。このとき対偶表現は難しくなるが, それでも大方の意味するものはできる。

(ii) 古文は現代文に直す。命令形は「～ すべきである。」と直す。

(iii) 主語や「全ての」とか「ある ～」などの語を適当に補って分かりやすくする。

(iv) 副詞, 形容詞, 助詞は最初は無視して, できた対偶相当の文に適当に付け加える。

問 4.1. 次の文の対偶に相当するものをいえ。

(i) 乗るなら飲むな。

(ii) ブレーキを踏まなければ止まらない。

(iii) 書かれていないものは数学ではない。

(iv) 朝の来ない夜はない。

((i) に関する交通標語「飲んだら乗るな。乗るなら飲むな。」は大変うまい。)

次の問題は問 4.1 よりも少し難しいかもしれない。

問 4.2. 次の文の対偶および裏に相当するものをいえ。

(i) 宿題がすまないと, 遊んではいけないよ。

(ii) 重要なことは, 何が真実かと言うことだ。

(iii) 人間は考える葦(あし)である。

(iv) 人生は何もしないで過ごすには長過ぎる。

(v) 理のある人は自分を世界に合わせようとする。

(vi) 母親がいればその子はこんなことはしなかった。

(vii) 己(おのれ)の欲せざることを人に施すなかれ。

((vii) は「自分のしてほしいと思わない行為を他人にしてはならない。」と直し, (さらに受動態に直すと) (2.3) の形ができる。(iii) や (vii) など名言には厳しい意味が込められていると思われる。)

講義ではここまでであるが, 期末テストの問題等を追加しておこう。次の問題 4.1 の正答率は 30 パーセント以下である。問題 4.2 は仲田 [1] の問題に少し手を入れたものである。正答率は 80 パーセント以上ある。問題 4.3 は新しく作った問題で, テストに出したことはない。

問題 4.1. (i) 次の命題の逆, 裏, 対偶を言え。

「算数 A を受講した学生は真面目
であり研究熱心でもある。」

(ii)　(i) で与えた命題が否定されたときに論理的に成り立つ命題を記し, そのように考える理由を説明せよ。

問題　4.2. 次の文を読んで問いに答えよ。

青, 赤, 黄色の服を着た 3 人の美人がいます。1 人は人間, 他の 1 人は悪魔, 他の 1 人は天使です。天使は常に本当のことを言い, 悪魔は常に嘘をつき, 人間は本当のことを言ったり嘘をついたりします。3 人は次のように述べました。

青服:「私は天使ではありません。」

赤服:「私は人間ではありません。」

黄服:「私は悪魔ではありません。」

問.　さて, どの服を着た人が誰でしょう。結論だけでなく考え方を説明せよ。

問題　4.3. 次の文は高校生の和泉(いずみ)君と和歌子さんの会話である。これを読んで後の問いに答えよ。

和　泉 「和歌子さん, この世に神様はいると思いますか, いないと思いますか。確率で答えてください。」

和歌子「あら， 私そんなこと全然考えたこともなかったわ。いるともいないとも言えないから確率で言えば $\frac{1}{2}$ ね。」

和　泉 「じゃあ， この世に仏様はいると思いますか。確率で答えてください。」

和歌子「それも同じような質問だから確率でいえば $\frac{1}{2}$ ね。」

和　泉 「いる確率がどちらも $\frac{1}{2}$ なら, いない確率もどちらも $\frac{1}{2}$ だから, 結局どちらもいない確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ になって, 神様か仏様のどちらかがいる確率は $\frac{3}{4}$ になるんだけど, そうですよね。」

和歌子「あら， そんなことになるの。でも最初に和泉君が『神様か仏様のどちらかがいる確率は? 』ってたずねたら，私, きっとそれに対しても『確率は $\frac{1}{2}$ 』って答えたと思うのだけど ……。 」

問.　2 人の話の結論は食い違ってしまったようだ。どうしてそうなったのか。推論が誤っているのか。2 人の話の食い違いの理由をわかり易く 200 字以内で説明せよ。

5. あとがき

この小論を書き進めながら考えた, 第 1 節の終わりに記したことに対する私なりの結果を述べよう。その後でまとめの感想を記しておく。

(1) 学生が「論理とことば」を面白くないと感じることについて

(1-1)「算数」のような選択科目を受講するときには, 学生はその授業のイメージ (先入観) を持っていると思う。彼等の算数観は多分, (a) あいまいさを含まない, (b) 計算をすれば唯一の正しい答えが得られる等であろう。

また, 期待するものは, (c) 教壇に立ったときに役に立つものであり, (d) 算数を楽しく展開するための方法や工夫であると思う。

(1-2) 私の「論理とことば」は上記のような彼等のイメージと期待に全く応えていない。彼らは, 集合は算数にはないと知っているから興味を示さない。また, 第 4 節は, 私にとっては様々な発見を含んでるのだが, 学生は発見とは感じられないので面白いと思えないのであろう。

私の意図が学生に十分伝わっていないことが問題である。いま思いつく具体的対応は次のようなものである。

(a) 言葉に関するあいまいさを整理する意味で, 問 2.2 以下の現象に関する記述は第 4 節にまとめた方が効果的だったろう。

(b) 第 3 節の図 7, 図 8 に示された概念関係が算数の理解に役立つことの説明をもっとすべきであった。

(c) 第 4 節は, 学生が発見と感じることができるような国語的な授業展開の方法を取り入れるべきである。

(d) 第 4 節の例は難しい。問題 4.1, 4.2, 4.3 のような問題を開発して意図を明確にする。

(2) 「算数」で「論理とことば」を講義する意義について

論理的に考える習慣をつけると言う意味で, このような講義は意義があると思っている。小免の専門科目全般を見ても, この種の講義は行われていないようにと思われる。

現在行っている「算数」の内容は, 算数教育の目標, 指導要領の解説, 算数のカリキュラム概観, 算数の 4 領域それぞれにおけるトピックス等であるが, 4 領域のうち図形や数量関係は時間がなくてやれないこともある。しかし, それらがすべて「論理とことば」に優先されるべきだとは考えていない。現時点で言えることは, 学生の勉強意欲を引き出すと言う意味では「論理とことば」は適切ではなかったようである。

(3) この講義の第 2 目的について

小学校の教師, 中学校の数学教師が授業で「集合」について話す機会はないであろう。しかし, 教材研究や研究会, 報告書や会議等で, 論理的に考えて表現する能力は必要であると考える。そのためには第 3 節の (A) まで, つまり必要なときにベン図を自分で描ける能力は身に付けるべきだと考える。

(4) 論理的思考力の養成について

算数 · 数学教育の目的の 1 つに, 論理的思考力の養成をあげている本は多い。([2, 5] 参照。) 指導要領でも「日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え $\cdots$」とあるのは, 消極的ながらそのことを述べているのだと思われる。

その一方では「数学で培われた論理的思考力は他の分野でも応用可能とは言えない。」と言うことも知られている。しかし重要なことは, その思考力がどのような学習によって養成できるのかが明確には解らない点にある。

数学の世界から 1 歩でも踏み出せば, そこには全く事情の異なる世界が広がっている。数学的論理能力をその世界に適応させようとすれば, それに合わせた訓練が必要になって来る。

この小論で言えば, 第 2 節は数学の話であるが, 第 4 節は私なりの訓練の最初の 1 歩である。ささやかな 1 歩だし無茶苦茶な 1 歩かも知れない。諸賢のご指導とご助言をお願いしたい。

参 考 文 献

[1] 沖田 浩 「尻の赤くないものはサルではない — 脳を鍛える論理トレーニング —」幻冬舎, (2004)

[2] 正田 實 監修「算数 · 数学教育の理論と実践」現代教育社, (2003)

[3] 赤 攝也 「集合論入門」新数学シリーズ 1, 培風館, (1957)

[4] 中原忠雄, 平林一栄他 「小学算数」(小学校教科書) 大阪書籍, (平成 10 年度用)

[5] 平岡 忠編「小学校算数科教育の研究」建帛社, (1992)

[6] 広中平祐, 杉山吉茂他「新しい算数」(小学校教科書) 東京書籍, (平成 10 年度用)

[7] 細井 勉 「集合・論理」教職シリーズ, 基礎編 6, 共立出版, (1982)

[8] 細井 勉「数学とことばの迷い路」日本評論社, (1992)

[9] 細井 勉 「日常語の論理と数学語の論理」発展 vol. 13, p7-21, (1994)

[10] 三浦俊彦 「論理パラドックス」二見書房, (2002)

(2008 年 5 月 30 日)