変化の状況からの交通量総量の推定と予測

The Estimation and the Forecast of Travelers from the Change of Surroundings

上　野　皓　司
Ueno,　Koji

ABSTRACT

The counting of total number of travelers from one district to another is usually very difficult because of the enormous and expensive work to do it. However it is necessary for the investment to transportation or the understanding of social and economic relation between those district. Models of estimation of total traveler from the amount or the rate of change of traveler for certain period are examined. Differential equations are used for the estiamtion.

交通量の予測は周辺の社会情勢や交通網の不確定な変化の影響を受けるために大きな誤差を生じることが多い。Button（1993）は第 9 章の「交通計画と予測」のなかで，英国や米国の道路や鉄道の予測値と後の実態とがどのように異なっているかを数値によって示している。しかし開発や発展によって都市や地域が変化する場合それらを結ぶ交通網の整備のためには事前の予測を必要とし，有効な予測方法を考案して行かなければならない。

地区間交通量はマクロ的な分析以外に旅行客個人の移動の動機からも検討することができる。通勤，通学，買い物等住民が移動したい動機から生じた交通量は移動需要と呼ぶことができ，そのようなミクロ的な旅行客個人の移動の動機を分析することによって交通量を把握することも可能である。Quandt and Baumol（1966）や McFadden（1974）には，後者のような移動需要による交通量の予測方法が検討されている。(1)

Werner（1985）には地区間交通量を推定し予測するための各種のモデルが要

約されている。内容は，旅客発生モデル（Trip Generation Models)，旅客分布モデル（Trip Distribution Models)，成長要因モデル（Growth Factor Models)，干渉機会モデル（Intervening Opportunity Models)，グラビティ・モデル（Gravity Models)，交通機関別モデル（Models of Modal Split)，抽象的交通機関モデル（Abstract Mode Models）等である。

隣接する都市や地域の間を移動する人や貨物の量がどれだけかは直接的な観測によってある程度明らかにされることができる。しかし直接的な観測は経費等の点から絶えず実施されることは不可能で，一般的にはなんらかの方法による推定に頼らざるをえない。その方法の一つが地区の人口や生産量，所得等による交通量の推定である。以下では地区の人口や生産量，所得等のある時点の変化量や変化率をもとに地区間の交通量を推定し予測する方法を検討する。

1. 基礎変数の変化量による推定

一般に地区の人口や生産量，所得等の交通量推定のための基礎変数はある期間内に変化する。これらの基礎変数を $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ と表せば，その変化量は Δx_i である。i は地区の番号であるが，分析の簡単化のために $n=2$ の場合を考える。旅客数や貨物量等の交通量を y とする。このとき交通量と基礎変数の関連は，例えば，

$$A\Delta x_1+B\Delta x_2=\Delta y \tag{1}$$

と表すことができる。$A\Delta x_1$ は1地区の，$B\Delta x_2$ は2地区の基礎変数の変化量による交通量の変化 Δy への影響を表している。二つの地区の間の相互的な交通量を推定するために，ある期間の $A\Delta x_1$, $B\Delta x_2$, Δy を調査し，二つの地区の x_1 と x_2 による y を推定する式を得ることが目的である。以下では A, B を1地区および2地区の基礎変数の変化量による交通量の変化量 Δy への「影響係数」と呼ぶ。また（1）の Δx_1, Δx_2, Δy は期間を微小にとった場合には，

（1） 特に Quandt and Baumol（1966）にはグラビティ・モデルによる二つの地区の間の移動が，McFadden（1974）には地区の人口を基礎とした旅行需要による移動が，分析されている。

$$Adx_1+Bdx_2=dy \tag{2}$$

と表される。以下ではこの（2）式を「基礎変数の変化量による交通量の変動方程式」と名づけ，この式をもとに検討する。

1－1.　影響係数が他の地区の基礎変数に関連する場合

最初に簡単な例として A と B が他の地区の基礎変数の総量によって

$$A=\alpha x_2,\ B=\alpha x_1$$

と表されるときを考える。このさいには，1 地区の基礎変数の変化量の影響係数は 2 地区の，2 地区の基礎変数の変化量の影響係数は 1 地区の，総数に定数 α を乗じた値が，時点 t の調査によって抽出されている。このとき（2）は

$$\alpha x_2dx_1+\alpha x_1dx_2=dy \tag{3}$$

と表される。

（3）から x_1 と x_2 の y に対する関連を何か見出すことができるであろうか。（3）は全微分方程式であるが，x_1 と x_2 の y に対する関数的な関連を抽出するためには（3）が積分可能でなければならない。このための条件は一般的には

$$A(\partial B/\partial y)-B(\partial A/\partial y)-(\partial A/\partial x_2-\partial B/\partial x_1)=0 \tag{4}$$

と表される[(2)]。（4）に影響係数を代入して偏微分すれば，

$$\alpha x_2(0)-\alpha x_1(0)-(\alpha-\alpha)=0$$

が成立するために，（3）は積分可能であることがわかる。（3）を解くためにまず y を定数と考えれば，

$$\alpha x_2dx_1+\alpha x_1dx_2=0 \tag{5}$$

であり，この解は一般的には

$$\rho=\int Adx_1+\int\{B-(\partial\int Adx_1)/\partial x_2\}dx_2=c \tag{6}$$

と表される[(3)]。（6）に影響係数の値を代入すれば，

$$\begin{aligned}\rho&=\int\alpha x_2dx_1+\int\{\alpha x_1-(\partial\int\alpha x_2dx_1/\partial x_2)\}dx_2=c\\&=\alpha x_1x_2+\int(\alpha x_1-\alpha x_1)dx_2=c\\&=\alpha x_1x_2=c\end{aligned}$$

となる。このとき

$$\alpha x_2 dx_1 + \alpha x_1 dx_2 = d\rho = dy$$

の関係が成立しているために，

$$d\alpha x_1 x_2 = dy$$

を解けば，

$$y = \alpha x_1 x_2 + c_1 \tag{7}$$

（2）この条件を導くために（2）を

$$Adx_1 + Bdx_2 - dy = 0 \tag{1}$$

と表す。(1) の各係数 A, B, -1 がある関数 $g(x_1,\ x_2,\ y)$ の x_1, x_2, y に関する偏微分係数であれば，(1) は $dg = 0$ になり，$g = c =$ 定数となって積分できる。このようになるのは各係数にどのような条件が存在する場合であろうか。

$$dg(x_1,\ x_2,\ y) = 0 \tag{2}$$

であるためには係数 A, B, -1 が $\partial g/x_1$, $\partial g/x_2$, $\partial g/y$ に比例しなければならない。すなわち h を x_1, x_2, y のある関数とすれば

$$hA = \partial g/x_1,\ hB = \partial g/x_2,\ -h = \partial g/y$$

である。hA を x_2 について，hB を x_1 について偏微分すれば，

$$h\partial A/\partial x_2 + A\partial h/\partial x_2 = \partial^2 g/(\partial x_1 \partial x_2)$$

$$h\partial B/\partial x_1 + B\partial h/\partial x_1 = \partial^2 g/(\partial x_2 \partial x_1)$$

であり，$\partial^2 g/(\partial x_1 \partial x_2) = \partial^2 g/(\partial x_2 \partial x_1)$ の関係より

$$h(\partial A/\partial x_2 - \partial B/\partial x_1) = B\partial h/\partial x_1 - A\partial h/\partial x_2 \tag{3}$$

を得る。同様に hA を y について，$-h$ を x_1 について偏微分すれば，

$$h\partial A/\partial y + A\partial h/\partial y = \partial^2 g/(\partial x_1 \partial y)$$

$$-\partial h/\partial x_1 = \partial^2 g/(\partial y \partial x_1)$$

であり，$\partial^2 g/(\partial x_1 \partial y) = \partial^2 g/(\partial y \partial x_1)$ の関係より

$$h\partial A/\partial y = -\partial h/\partial x_1 - A\partial h/\partial y \tag{4}$$

を得る。また hB を y について，$-h$ を x_2 について偏微分すれば，

$$h\partial B/\partial y + B\partial h/\partial y = \partial^2 g/(\partial x_2 \partial y)$$

$$-\partial h/\partial x_2 = \partial^2 g/(\partial y \partial x_2)$$

であり，$\partial^2 g/(\partial x_2 \partial y) = \partial^2 g/(\partial y \partial x_2)$ の関係より

$$h\partial B/\partial y = -\partial h/\partial x_2 - B\partial h/\partial y \tag{5}$$

を得る。

(3) に -1 を，(4) に $-B$ を，(5) に A を乗じれば，

$$-h(\partial A/\partial x_2 - \partial B/\partial x_1) = -B\partial h/\partial x_1 + A\partial h/\partial x_2 \tag{6}$$

$$-Bh\partial A/\partial y = B\partial h/\partial x_1 + AB\partial h/\partial y \tag{7}$$

$$Ah\partial B/\partial y = -A\partial h/\partial x_2 - AB\partial h/\partial y \tag{8}$$

が得られ，両辺を加えれば右辺が0になり，h を消去すれば，

$$A(\partial B/\partial y) - B(\partial A/\partial y) - (\partial A/\partial x_2 - \partial B/\partial x_1) = 0 \tag{9}$$

が得られる。

が求められる。c_1 は積分定数である。

この（7）で $\alpha = G/d_{12}$ と想定すれば，グラビティ・モデルの基礎的な式と一致する。グラビティ・モデルの基礎的な式は

$$y = Gx_1x_2/d_{12} \tag{8}$$

と表され，G は定数，d_{12} は二つの地区間の距離であり，両地区間の交通量は各地区の基礎変数の総量を乗じた値に比例し距離に反比例する，ことを示している。[(4)]

1−2. 影響係数が定数の場合

上記の例より単純な関連として1地区と2地区の影響係数がいずれも定数であるとき，すなわち

$$A = \alpha,\ B = \beta \tag{9}$$

であれば，両地区の基礎変数の交通量への関連は，

$$\alpha dx_1 + \beta dx_2 = dy \tag{10}$$

と表される。（4）へ（9）を代入すれば0となり，積分可能の条件は満たされて

（3）$\alpha x_2 = A$，$\alpha x_1 = B$ のとき

$$Adx_1 + Bdx_2 = 0 \tag{1}$$

であれば，$d\rho = 0$ であり，この解は $\rho = c$ となる。c は定数である。A と B は ρ の偏微分係数であるために，$A = \partial\rho/\partial x_1$，$B = \partial\rho/\partial x_2$ であり，$A = \partial\rho/\partial x_1$ を x_1 について積分すれば，

$$\rho = \int Adx_1 + c_1$$

である。c_1 は x_1 については定数であるが，x_2 については関数でありうる。そこで $c_1 = v(x_2)$ と表せば，

$$\rho = \int Adx_1 + v(x_2) \tag{2}$$

であり，この式を $B = \partial\rho/\partial x_2$ に代入すれば，

$$B = (\partial \int Adx_1)/\partial x_2 + dv(x_2)/dx_2,$$

すなわち

$$dv(x_2)/dx_2 = B - (\partial \int Adx_1)/\partial x_2$$

である。この式を積分すれば，

$$v(x_2) = \int \{B - (\partial \int Adx_1)/\partial x_2\}\, dx_2 \tag{3}$$

であり，（3）を（2）に代入すれば，

$$\rho = \int Adx_1 + \int \{B - (\partial \int Adx_1)/\partial x_2\}\, dx_2 = c \tag{4}$$

であり，（4）が（1）の解になる。

（4）グラビティ・モデルについてはIsard（1960），11章やWilson（1969）を参照。

いる。y を定数と考えれば，

$$\alpha dx_1+\beta dx_2=0 \tag{11}$$

であり，この式の解は（6）より，

$$\rho=\int\alpha dx_1+\int\{\beta-(\partial\int\alpha dx_1)/\partial x_2\}dx_2=c \tag{12}$$

であり，整理すれば，c を定数として

$$\rho=\alpha x_1+\beta x_2=c$$

となる。したがって $d\rho=dy$ より，

$$d(\alpha x_1+\beta x_2)=dy$$

を解いて，

$$y=\alpha x_1+\beta x_2+c_1 \tag{13}$$

が求められる。

この関連のもとでは1地区と2地区の基礎変数は定数 α と β によって交通量に関連し，ある地区の基礎変数の増減は他の地区の影響とは独立に交通量を増減させる。グラビティ・モデルでは x_1 の増大による影響は x_2 の大小によって異なるが，この関連では x_1 の増大による影響は影響係数 α の大小によって左右され，x_2 の大小によっては影響を受けない。すなわち地区間交通量はグラビティ・モデルでは両地区の基礎変数の規模がお互いを規制するが，この関連ではそれぞれ独自の影響を生じる。

1－3. 影響係数が定数と他の地区の基礎変数に関連する場合

次に影響係数が上記2例の関連を総合的に表示しているときを考える。すなわち

$$A=\alpha+\gamma x_2,\ B=\beta+\gamma x_1 \tag{14}$$

のもとでは両地区の基礎変数の変化量と交通量の変化量の関連は，

$$(\alpha+\gamma x_2)dx_1+(\beta+\gamma x_1)dx_2=dy \tag{15}$$

と表される。（4）へ（14）を代入すれば0となり，積分可能の条件は満たされている。y を定数と考えれば，

$$(\alpha+\gamma x_2)dx_1+(\beta+\gamma x_1)dx_2=0 \tag{16}$$

であり，この式の解は（6）より，

$$\rho=\int(\alpha+\gamma x_2)dx_1+\int\{\beta+\gamma x_1-(\partial\int(\alpha+\gamma x_2)dx_1)/\partial x_2\}dx_2=c \tag{17}$$

であり，整理すれば，c を定数として

$$\rho=\alpha x_1+\gamma x_1 x_2+\beta x_2=c$$

となる。したがって $d\rho=dy$ より，

$$d(\alpha x_1+\gamma x_1 x_2+\beta x_2)=dy$$

を解いて，

$$y=\alpha x_1+\gamma x_1 x_2+\beta x_2+c_1 \tag{18}$$

が求められる。

この影響係数のもとでは交通量の総量へは $(\alpha x_1+\beta x_2)$ と $\gamma x_1 x_2$ の二つの部分が関連し，前者が上記の第 2 例の，後者が第一例の両地区の基礎変数の影響である。

1－4. 影響係数が両地区の基礎変数に関連する場合

影響係数が両地区の基礎変数に関連している場合を考える。一例としてそれぞれの影響係数はいずれも基礎変数と定数によって結ばれており，

$$A=\alpha x_1+\gamma x_2,\ B=\beta x_2+\gamma x_1 \tag{19}$$

となる場合を考える。他の地区の基礎変数との関連は同じ定数 γ で表される。このとき両地区の基礎変数の変化量と交通量の変化量の関連は，

$$(\alpha x_1+\gamma x_2)dx_1+(\beta x_2+\gamma x_1)dx_2=dy \tag{20}$$

と表される。（4）へ（19）を代入すれば 0 となり，積分可能の条件は満たされている。y を定数と考えれば，

$$(\alpha x_1+\gamma x_2)dx_1+(\beta x_2+\gamma x_1)dx_2=0 \tag{21}$$

であり，この式の解は（6）より，

$$\rho=\int(\alpha x_1+\gamma x_2)dx_1+\int\{\beta x_2+\gamma x_1-(\partial\int(\alpha x_1+\gamma x_2)dx_1)/\partial x_2\}dx_2=c \tag{22}$$

であり，整理すれば，c を定数として

$$\rho = (\alpha/2)x_1^2 + \gamma x_1 x_2 + (\beta/2)x_2^2 = c$$

となる。したがって $d\rho = dy$ より，

$$d((\alpha/2)x_1^2 + \gamma x_1 x_2 + (\beta/2)x_2^2) = dy$$

を解いて，

$$y = (\alpha/2)x_1^2 + \gamma x_1 x_2 + (\beta/2)x_2^2 + c_1 \tag{23}$$

が求められる。もし $(\alpha/2) = (\gamma/2) = (\beta/2) = \delta$

であれば

$$y = \delta(x_1 + x_2)^2 + c_1 \tag{24}$$

となる。

ここでは交通量は両地区の基礎変数が，特に（20）に示されるように1地区の影響係数が2地区と同時に1地区自身の基礎変数によって，2地区の影響係数が1地区と同時に2地区自身の基礎変数によって，表示されるために，交通量の変化量は両地区の基礎変数による複雑な影響を受け，その結果として（23）のような関連が得られる。

2. 交通量と基礎変数の変化率による推定

ある時点の交通量が両地区の交通量と基礎変数の変化率に関連するとき交通量と両地区の基礎変数はどのような関係しているであろうか。すなわちある時点の交通量と1地区の基礎変数の変化率の比率 $\partial y/\partial x_1$ と2地区の基礎変数の変化率の比率 $\partial y/\partial x_2$ が定数や基礎変数によって表される値 V や W，Z によって

$$V\partial y/\partial x_1 + W\partial y/\partial x_2 = Z \tag{25}$$

と表されるとき，x_1，x_2 と y はどのように関係しているであろうか。以下では V と W を交通量と各地区の基礎変数の変化率による交通量への影響係数と考え，ある時点の調査によって得られた V と W，Z の例を想定し，両地区と交通量の関係を検討する。また（25）を「交通量と基礎変数の変化率による交通量の変動方程式」と呼ぶ。

2−1. 影響係数が定数である場合

最初の例として

$$V=\alpha,\ W=\beta,\ Z=y \tag{26}$$

の場合を考える。このとき（25）は，

$$\alpha\partial y/\partial x_1+\beta\partial y/\partial x_2=y \tag{27}$$

となる。（27）は1地区の交通量と基礎変数の変化量の比率に一定数αを乗じた割合で，2地区の交通量と基礎変数の変化量の比率に一定数βを乗じた割合で，交通量を生み出すことを示している。すなわち基礎変数の限界的な交通量への効果が定数によってその時点の交通量の総量と結ばれている。

（27）は偏微分方程式であるが，簡単な式であるために交通量と基礎変数の関係を表す解はこの式に対応する以下の常微分方程式

$$dx_1/\alpha=dx_2/\beta=dy/y \tag{28}$$

を解くことによって得られる[5]。まず$dx_1/\alpha=dy/y$を解けば，

$$\int(1/\alpha)dx_1=\int(1/y)dy$$

$$(1/\alpha)x_1=\log y+a_1$$

より，

$$y=\exp(x_1/\alpha)+c_1 \tag{29}$$

であり，$dx_2/\beta=dy/y$を解けば，

$$\int(1/\beta)dx_2=\int(1/y)dy$$

$$(1/\beta)x_2=\log y+a_2$$

より，

（5）次の線形一階偏微分方程式

$$f(x_1,\ x_2,\ y)(\partial y/\partial x_1)+g(x_1,\ x_2,\ y)(\partial y/\partial x_2)=h(x_1,\ x_2,\ y)$$

に解が存在するときには，全微分の公式

$$(\partial y/\partial x_1)dx_1+(\partial y/\partial x_2)dx_2=dy$$

より，

$$dx_1:dx_2:dy=f(x_1,\ x_2,\ y):g(x_1,\ x_2,\ y):h(x_1,\ x_2,\ y)$$

の関係が得られる。したがって

$$dx_1/f(x_1,\ x_2,\ y)=dx_2/g(x_1,\ x_2,\ y)=dy/h(x_1,\ x_2,\ y)$$

の関係より，（28）を解けばよい。

$$y = \exp(x_2/\beta) + c_2 \tag{30}$$

である。$dx_1/\alpha = dx_2/\beta$ を解けば，

$$\int(1/\alpha)dx_1 = \int(1/\beta)dx_2$$

$$(1/\alpha)x_1 = (1/\beta)x_2 + a_3$$

より，

$$x_1 = (\alpha/\beta)x_2 + c_3 \tag{31}$$

である。これらの関係から（27）の解を見出さなければならないが，（29）と（30）の c_1 や c_2 は単なる定数ではなく，通常なんらかの関数であるために，推測によって

$$c_1 = \exp(x_2/\beta),\ c_2 = \exp(x_1/\alpha)$$

と考えれば，

$$y = \exp(x_1/\alpha) + \exp(x_2/\beta) \tag{32}$$

が解であると予想できる。もし（32）が解であれば，

$$\partial y/\partial x_1 = (1/\alpha)\exp(x_1/\alpha), \tag{33}$$

$$\partial y/\partial x_2 = (1/\beta)\exp(x_2/\beta) \tag{34}$$

であり，

$$\alpha\partial y/\partial x_1 + \beta\partial y/\partial x_2 = y \tag{27}$$

に（33）と（34）を代入すれば，

$$\alpha\partial y/\partial x_1 + \beta\partial y/\partial x_2 = \exp(x_1/\alpha) + \exp(x_2/\beta) = y$$

であり，（32）が一つの解であることが明らかになる。[6]

2－2．影響係数が各地区の基礎変数の関数である場合

第二の例として

$$V = \alpha x_1,\ W = \beta x_2,\ Z = y \tag{35}$$

（6）（32）は一つの特異解であるが，これ以外にも解が存在する可能性がある。偏微分方程式では完全解，一般解，特異解，特殊解等の関数，c_1 と c_2 の関わり状況に応じた分類があるが，それぞれの解が複数存在する可能性がある。

の場合を考える。このとき関係式（25）は，

$$\alpha x_1 \partial y／\partial x_1 + \beta x_2 \partial y／\partial x_2 = y \tag{36}$$

となる。（36）は，交通量は，1 地区の交通量と基礎変数の変化量の比率に関数 αx_1 を乗じた割合で，2 地区の交通量と基礎変数の変化量の比率に関数 βx_2 を乗じた割合で，生み出されることを示している。すなわち基礎変数の限界的な交通量への効果がそれぞれの地区の基礎変数の関数によってその時点の交通量の総量と結ばれている。ここでは α と β は定数であり，V と W は各地区の基礎変数の一次関数になっている。

（36）は偏微分方程式であるが，上記と同様に交通量と基礎変数の関係を表す解はこの式に対応する以下の常微分方程式

$$dx_1／\alpha x_1 = dx_2／\beta x_2 = dy／y \tag{37}$$

を解くことによって得られる。まず $dx_1／\alpha x_1 = dy／y$ を解けば，

$$\int (1／\alpha x_1) dx_1 = \int (1／y) dy$$

$$(1／\alpha) \log x_1 = \log y + a_1$$

より，

$$y = c_1 x_1^{(1／\alpha)} \tag{38}$$

であり，$dx_2／\beta x_2 = dy／y$ を解けば，

$$\int (1／\beta x_2) dx_2 = \int (1／y) dy$$

$$(1／\beta) \log x_2 = \log y + a_2$$

より，

$$y = c_2 x_2^{(1／\beta)} \tag{39}$$

である。$dx_1／\alpha x_1 = dx_2／\beta x_2$ を解けば，

$$\int (1／\alpha x_1) dx_1 = \int (1／\beta x_2) dx_2$$

$$(1／\alpha) \log x_1 = (1／\beta) \log x_2 + a_3$$

より，

$$x_1^{(1／\alpha)} = c_3 x_2^{(1／\beta)} \tag{40}$$

である。これらの関係から（36）の解を見出さなければならないが，（38）と

(39) の c_1 や c_2 は単なる定数ではなく，通常なんらかの関数であるために，(40) を考慮した推測によって

$$c_1 = [1 + \{x_2^{(1/\beta)} / x_1^{(1/\alpha)}\}],$$

$$c_2 = [1 + \{x_1^{(1/\alpha)} / x_2^{(1/\beta)}\}]$$

と考えれば，

$$y = x_1^{(1/\alpha)} + x_2^{(1/\beta)} \tag{41}$$

が解であると予想できる。もし (41) が解であれば，

$$\partial y / \partial x_1 = (1/\alpha) x_1^{\{(1/\alpha)-1\}} \tag{42}$$

$$\partial y / \partial x_2 = (1/\beta) x_2^{\{(1/\beta)-1\}} \tag{43}$$

であり，

$$\alpha x_1 \partial y / \partial x_1 + \beta x_2 \partial y / \partial x_2 = y \tag{36}$$

に (42) と (43) を代入すれば，

$$\alpha x_1 \partial y / \partial x_1 + \beta x_2 \partial y / \partial x_2 = x_1^{(1/\alpha)} + x_2^{(1/\beta)} = y$$

であり，(41) が一つの解であることがわかる。

2－3. 影響係数が各地区の基礎変数と独自の定数に関連する場合

第三の例として

$$V = \alpha_1 + \alpha_2 x_1,\ W = \beta_1 + \beta_2 x_2,\ Z = y \tag{44}$$

の場合を考える。このとき関係式 (25) は，

$$(\alpha_1 + \alpha_2 x_1) \partial y / \partial x_1 + (\beta_1 + \beta_2 x_2) \partial y / \partial x_2 = y \tag{45}$$

となる。(45) は交通量は，1 地区の交通量と基礎変数の変化量の比率に関数 $(\alpha_1 + \alpha_2 x_1)$ を乗じた割合で，2 地区の交通量と基礎変数の変化量の比率に関数 $(\beta_1 + \beta_2 x_2)$ を乗じた割合で，生み出されることを示している。すなわち基礎変数の限界的な交通量への効果がそれぞれの地区の基礎変数の定数を含む 1 次関数によってその時点の交通量の総量と結ばれている。ここでは α と β は定数である。

(45) は偏微分方程式であるが，上記と同様に交通量と基礎変数の関係を表す

解はこの式に対応する次の常微分方程式

$$dx_1／(\alpha_1+\alpha_2x_1)=dx_2／(\beta_1+\beta_2x_2)=dy／y \tag{46}$$

を解くことによって得られる。まず $dx_1／(\alpha_1+\alpha_2x_1)=dy／y$ を解けば，

$$\int\{1／(\alpha_1+\alpha_2x_1)\}dx_1=\int(1／y)dy$$

$$(1／\alpha_2)\log(\alpha_1+\alpha_2x_1)=\log y+a_1$$

より，

$$y=c_1(\alpha_1+\alpha_2x_1)^{(1／\alpha_2)} \tag{47}$$

であり，$dx_2／(\beta_1+\beta_2x_2)=dy／y$ を解けば，

$$\int\{1／(\beta_1+\beta_2x_2)\}dx_2=\int(1／y)dy$$

$$(1／\beta_2)\log(\beta_1+\beta_2x_2)=\log y+a_2$$

より，

$$y=c_2(\beta_1+\beta_2x_2)^{(1／\beta_2)} \tag{48}$$

である[7]。

$dx_1／(\alpha_1+\alpha_2x_1)=dx_2／(\beta_1+\beta_2x_2)$ を解けば，

$$\int\{1／(\alpha_1+\alpha_2x_1)\}dx_1=\int\{1／(\beta_1+\beta_2x_2)\}dx_2$$

$$(1／\alpha_2)\log(\alpha_1+\alpha_2x_1)=(1／\beta_2)\log(\beta_1+\beta_2x_2)+a_3$$

$$(\alpha_1+\alpha_2x_1)^{(1／\alpha_2)}=c_3(\beta_1+\beta_2x_2)^{(1／\beta_2)} \tag{49}$$

が得られる。

これらの関係から（45）の解を見出さなければならないが，（47）と（48）の c_1 や c_2 は単なる定数ではなく，通常なんらかの関数であるために，（49）を考慮した推測によって

$$c_1=〔1+\{(\beta_1+\beta_2x_2)^{(1／\beta_2)}／(\alpha_1+\alpha_2x_1)^{(1／\alpha_2)}\}〕,$$

（7）$(\alpha_1+\alpha_2x_1)=X$ と置けば，

$$d\log X／dx_1=(d\log X／dX)(dX／dx_1)$$
$$=\{1／(\alpha_1+\alpha_2x_1)\}\alpha_2$$

より，（47）が，$(\beta_1+\beta_2x_2)=Y$ と置けば，

$$d\log Y／dx_2=(d\log Y／dY)(dY／dx_2)$$
$$=\{1／(\beta_1+\beta_2x_2)\}\beta_2$$

より（48）が得られる。

$$c_2=〔1+\{(\alpha_1+\alpha_2x_1)^{(1/\alpha_2)}/(\beta_1+\beta_2x_2)^{(1/\beta_2)}\}〕$$

と考えれば,

$$y=(\alpha_1+\alpha_2x_1)^{(1/\alpha_2)}+(\beta_1+\beta_2x_2)^{(1/\beta_2)} \tag{50}$$

が解であると予想できる。もし（50）が解であれば,

$$\partial y/\partial x_1=(\alpha_1+\alpha_2x_1)^{\{(1/\alpha_2)-1\}} \tag{51}$$

$$\partial y/\partial x_2=(\beta_1+\beta_2x_2)^{\{(1/\beta_2)-1\}} \tag{52}$$

であり(8),

$$(\alpha_1+\alpha_2x_1)\partial y/\partial x_1+(\beta_1+\beta_2x_2)\partial y/\partial x_2=y \tag{45}$$

に（51）と（52）を代入すれば,

$$\alpha x_1\partial y/\partial x_1+\beta x_2\partial y/\partial x_2$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2x_1)^{(1/\alpha_2)}+(\beta_1+\beta_2x_2)^{(1/\beta_2)}=y$$

であり,（50）が一つの解であることがわかる。

2－4. 右辺が定数の場合

それでは（25）の右辺がある時点の交通量ではなく定数γで,「交通量と基礎変数の変化率による交通量の変動方程式」が,

$$V\partial y/\partial x_1+W\partial y/\partial x_2=y \tag{53}$$

と表されるとき，基礎変数と交通量はどのような関係を有しているであろうか。

$Z=y$と$Z=\gamma$の差異は，右辺によって示される値がその時点の交通量かそれには無関係な一定の値かという点であり，実態調査では$Z=\gamma$が$Z=y$より多数

（8）$(\alpha_1+\alpha_2x_1)=X$,$(\beta_1+\beta_2x_2)=Y$と置けば,

$$y=X^{(1/\alpha_2)}+Y^{(1/\beta_2)}$$

であり,

$$\begin{aligned}\partial y/\partial x_1&=(\partial y/\partial X)(dX/dx_1)\\&=(1/\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2x_1)^{\{(1/\alpha_2)-1\}}\cdot\alpha_2,\\&=(\alpha_1+\alpha_2x_1)^{\{(1/\alpha_2)-1\}}\\\partial y/\partial x_2&=(\partial y/\partial Y)(dY/dx_2)\\&=(1/\beta_2)(\beta_1+\beta_2x_2)^{\{(1/\alpha_2)-1\}}\cdot\beta_2\\&=(\beta_1+\beta_2x_2)^{\{(1/\alpha_2)-1\}}\end{aligned}$$

となる。

の状況を表していると考えられる。

(53) はまた

$$V\partial y/\partial x_1 = -W\partial y/\partial x_2 + \gamma$$

と表すことができ，ここでは $\partial y/\partial x_1$ と $\partial y/\partial x_2$ の関係が V，W, γ によって表示されている。したがって右辺が y のときと γ のときとでは実態調査で計測するべき姿勢が異なるが，以下では y のときと同じく右辺に γ を表示する。

数学的には V や W が類似の関数であれば，$Z=\gamma$ のもとでの関係は，$Z=y$ にしたがって解くことができる。したがって以下では例示のために，左辺は上記の 3 例と同じで右辺だけが y から定数 γ に変わればどのような関係が存在するかを，結果のみ表示する。

第一の例として

$$V=\alpha,\ W=\beta,\ Z=\gamma \tag{54}$$

の場合を考える。このとき (25) は,

$$\alpha\partial y/\partial x_1 + \beta\partial y/\partial x_2 = \gamma \tag{55}$$

であり，この式の一つの解は,

$$y = (\gamma/2\alpha)x_1 + (\gamma/2\beta)x_2 \tag{56}$$

である。

第二の例として

$$V=\alpha x_1,\ W=\beta x_2,\ Z=\gamma \tag{57}$$

の場合を考える。このとき (25) は,

$$\alpha x_1\partial y/\partial x_1 + \beta x_2\partial y/\partial x_2 = \gamma \tag{58}$$

であり，この式の一つの解は,

$$y = (\gamma/2\alpha)\log x_1 + (\gamma/2\beta)\log x_2 \tag{59}$$

である。

第三の例として

$$V=\alpha_1+\alpha_2 x_1,\ W=\beta_1+\beta_2 x_2,\ Z=\gamma \tag{60}$$

の場合を考える。このとき関係式 (25) は,

$$(\alpha_1+\alpha_2x_1)\partial y/\partial x_1+(\beta_1+\beta_2x_2)\partial y/\partial x_2=\gamma \tag{61}$$

であり，この式の一つの解は，

$$y=(\gamma/2\alpha_2)\log(\alpha_1+\alpha_2x_1)+(\gamma/2\beta_2)\log(\beta_1+\beta_2x_2) \tag{62}$$

である。

3.　数値例

上記のモデルは基礎変数と交通量の相互の関係を総数によって測定することが計測の経費や手数上困難であるとき，ある期間の基礎変数と交通量の変化量や変化率を測定し，そこから導かれる推定式によって総数相互の関係を把握しようとすることを目的としている。したがってまずある期間の基礎変数と交通量の変化量の関連が入念に調査される必要があるが，以下では分析の例として上記で導かれた変化量や変化率の関係を利用してどのような総数相互の関係が把握できるかを，数値によって例示する。

ここでは隣接する二つの地区を想定し，基礎変数は両地区の人口，交通量は両地区を車やその他の手段によって行き来する旅客数，を仮定する。(9)

3－1.　基礎変数の変化量による推定

1地区の人口が1万人，2地区の人口が5万人の隣接する二地区を多数の地域から4個抽出し実態調査した。人口数が同じであった過去の同じ長さの期間のいくつかの資料を抽出し，dx_1 や dx_2，dy 等について統計的な分析を行った結果，第一の地域では関係式は，「影響係数が他の地区の基礎変数に関連する場合」であり，(3) 式は

$$0.000142857x_2dx_1+0.000142857x_1dx_2=dy, \tag{63}$$

その解は，

$$y=0.000142857x_1x_2+c_1, \tag{64}$$

（9） 森地茂・山形耕一（1993），3章や鈴木道雄（1991），2章2節には人や貨物の移動の具体的な調査方法が述べられている。

であり，第二の地域では関係式は「影響係数が定数の場合」であり，(10) 式は

$$10dx_1+5dx_2=dy, \tag{65}$$

その解は，

$$y=10x_1+5x_2+c_1 \tag{66}$$

であり，第三の地域では関係式は「影響係数が定数と他の地区の基礎変数に関連する場合」であり，(15) 式は

$$(5+0.0001x_2)dx_1+(4+0.0001x_1)dx_2=dy, \tag{67}$$

その解は，

$$y=5x_1+0.0001x_1x_2+4x_2+c_1 \tag{68}$$

であり，第四の地域では関係式は「影響係数が両地区の基礎変数が関連する場合」であり，(20) 式は

$$(0.0005x_1+0.0001x_2)dx_1+(0.00008x_2+0.0001x_1)dx_2=dy, \tag{69}$$

その解は，

$$y=(0.0005/2)x_1^2+0.0001x_1x_2+(0.00008/2)x_2^2+c_1 \tag{70}$$

であった。[(10)]

それぞれの解には積分定数 c_1 が含まれているために，y や x_1，x_2 等の実態調査によって c_1 の値を測定しなければその時点の交通量の総数 y を基礎変数からすぐに推定することはできないが，もし c_1 が不確定であっても，将来の交通量の変化量はこの解から予測することができる。すなわちある時点の y と将来時点の y との差を計算することができる。以下は現時点の人口が $x_1=1$ 万人，$x_2=5$ 万人から将来時点に $x_1=2$ 万人，$x_2=10$ 万人に変化したさいの交通量 y の変化の予測値である。[(11)]

	第一例	第二例	第三例	第四例
現時点の y	$71428.5+c_1$	$350000+c_1$	$300000+c_1$	$175000+c_1$
将来時点の y	$285714+c_1$	$700000+c_1$	$700000+c_1$	$700000+c_1$
y の変化量	214285.5	350000	400000	5250000

3−2. 交通量と基礎変数の変化率による推定

交通量と基礎変数の変化率によるモデルでは，最初の3例は右辺が交通量の総量yであるために，ある時点の交通量の総量yを把握しなければならない。yの測定や推定が困難であるときには右辺にyがある最初の3例は利用できず，後の右辺が定数γである場合が利用可能である。理論的なモデルとして右辺がyの例をあげているが，以下では実際に利用可能な右辺が定数である場合のモデルについて計算する。上記と同様に1地区の人口が1万人，2地区の人口が5万人の隣接する二地区を多数の地域から3個抽出した場合を想定し，1地区の人口が2万人，2地区の人口が10万人に増加したさいの交通量を予測する。

第一の地域で過去の同じ人口であった時期のサンプルをいつくかとり，統計的な分析を行った結果，交通量の変化率の両地区の相互関係は第一例の「影響係数が定数である場合」であった。すなわち交通量の変化率の関係式は，式（55）から

$$2\partial y / \partial x_1 = 20 - 10\partial y / \partial x_2 \tag{71}$$

と抽出された。このとき$\alpha = 2$, $\beta = 10$, $\gamma = 20$であり，解（56）は

$$y = 5x_1 + x_2 \tag{72}$$

となる。

第二の地域で過去の同じ人口であった時期のサンプルをいつくかとり，統計的な分析を行った結果，交通量の変化率の両地区の相互関係は第二例の「影響係数が各地区の基礎変数の関数である場合」であった。すなわち交通量の変化率の関係式は，式（58）から

$$x_1\partial y / \partial x_1 = 10857.36 - 1.1747x_2\partial y / \partial x_2 \tag{73}$$

---

(10) 交通量は絶えず変動しているために期間を設定した場合には正確な平均値を把握しなければならない。期間の単位としては，年，季節，月，週，日，時，分等が考えられるが，期間変動や測定方法については，福田正（1994），4章や越正毅・明神証（1983），1章5節を参照。

(11) 近年の大都市郊外地区の発展は郊外の人口を急速に増大させ，大都市とそれらの地区の間の交通量をも急増させている。Dierx（1990）は，このような状況は相互の交通網の改善によって促進されたと述べているが，二つの地区間の交通網が改善されれば，変動方程式にも変化が生じると考えられ，基礎変数の予測値と同時に方程式をも修正する必要がある。

と抽出された。このとき $\alpha=1$, $\beta=1.1747$, $\gamma=10857.36$ であり，解（59）は

$$y=5428.68\log x_1+4621.17\log x_2 \tag{74}$$

となる。

第三の地域で過去の同じ人口であった時期のサンプルをいつくかとり，統計的な分析を行った結果，交通量の変化率の両地区の相互関係は第三例の「影響係数が各地区の基礎変数と独自の定数に関連する場合」であった。すなわち交通量の変化率の関係式は，式（61）から

$$(10000+x_1)\partial y/\partial x_1=10097.45-(-30000+x_2)\partial y/\partial x_2 \tag{75}$$

と抽出された。このとき $\alpha_1=10000$, $\alpha_2=1$, $\beta_1=-30000$, $\beta_2=1$, $\gamma=10097.45$ であり，解（62）は

$$y=5048.73\log(10000+x_1)+5048.73\log(-30000+x_2) \tag{76}$$

となる。

上記の結果にしたがって両地区の人口が $x_1=20000$, $x_2=100000$ に増加したさいの予測値を計算すれば以下のようになる。[12]

	第一例	第二例	第三例
現時点の y	100000	100000	100000
将来時点の y	200000	106966.05	108372.25
y の変化量	100000	6966.05	8372.25

参考文献

Button, Kenneth J., Transport Economics, 2nd Edition, Edward Elgar, 1993.
Dierx, Adriaan H., “Intermetropolitan Transfer Costs and the Equilibrium Size of Metropolitan Areas”, Regional Science and Urban Economics, 20（1990），173-187.
福田正,『交通工学』, 朝倉書店，1994 年。

（12）小規模人口の地区間の旅客には通勤や通学，買い物等が多く，工場やショッピングセンターの立地は，旅客数の変化に大きく影響する。Keane（1989）はこれらが地区の経済にどのような変化を及ぼすかを検討しているが，大きな工場やショッピングセンターの立地は，変動方程式にも変化を引き起こす可能性がある。

Isard , Walter, Methods of Regional Analysis: an Introduction to Regional Science , M. I. T. Press. 1960.

Keane, Michael J., “Function and Competition among Urban Centers”, Journal of Regional Science, 29（1989）, 265-276.

越正毅・明神証『道路（1）－交通流－』, 土木学会編「新体系土木工学」61, 技報堂出版, 1983 年。

McFadden, Daniel, “The Measurement of Urban travel demand”, Journal of Public Economics, 3（1974）, 303-28.

森地茂・山形耕一編『交通計画』, 土木学会編「新体系土木工学」60, 技報堂出版, 1993 年。

Quandt, Richard E. and William J. Baumol, “The Demand for Abstract Transport Modes: Theory and Measurement”, Journal of Regional Science, 6（1966）, 13-26.

鈴木道雄編著『道路（Ⅱ）－計画と幾何設計－』, 土木学会編「新体系土木工学」62, 技報堂出版, 1991 年。

Werner, Christian, Spatial Transportation Modeling, Sage Publications, 1985.

Wilson, A. G., “Developments of Some Elementary Residential Location Models”, Journal of Regional Science, 9（1969）, 377-85.