家計、企業、公共機関の純金融資産のマクロ的関連

Macroscopic Relations of Net Financial Assets among Households, Firms, and Public Institutions

上　野　皓　司
Ueno, Koji

ABSTRACT

Households, firms, and public institutions such as governments, public corporations hold own net financial assets which include cash, savings and liquid securities. Are there any relations among net financial assets of each sector? Actual proofs or evidences about these relations by data are not yet shown. However the movements of net financial assets of each sector are analyzed theoretically by assuming some macroscopic relations among sectors.

社会全体を三部門に分ける。第 1 部門は家計，第 2 部門は企業，第 3 部門は政府，自治体，公営事業等の公共機関である。それぞれの部門は独自の自己所有資産と借用資産を持っている。資産は土地・建物等の不動産，現金・預金・株式・債券等の金融資産，在庫品・原料等の一般的な動産，借用資産は他の法人や機関，個人から借りた不動産・金融資産・一般的な動産からなっている。ここでは資産のうち特に金融資産に注目する。

家計の所有している金融資産は現金・普通預金・定期預金・保険積立・株式・債券等で，借りている金融資産は主として住宅や消費財購入のための現金である。企業の所有している金融資産は現金・普通預金・定期預金・保険積立・株式・債券・売掛金等で，借りている金融資産は，経営のための銀行等からの借入金・商品の買掛金・社債等の発行による金銭的債務である。公共機関の所有している金融資産は現金・普通預金・定期預金・保険積立・債券等で，借りてい

る金融資産は，公共事業のための銀行等からの借入金・国債や地方債の発行による金銭的債務等である。以下では所有している金融資産を単に「金融資産」，借りている金融資産を「金融負債」と呼び，金融資産と金融負債の差額である純金融資産の時間的な推移を考える。(1)

総務庁の貯蓄動向調査によれば1999年の1世帯当たりの年間収入は755万円，貯蓄額は1738万円， 負債額は577万円，世帯主の年齢は52.7才である。また大蔵省の法人企業統計調査によれば，1998年の企業全体の流動資産は632兆円，流動負債は576兆円であり，日銀の調査によれば，国内銀行の預金者別預金残高は，1999年で個人288兆円，一般企業153兆円，公金22兆円，金融機関17兆円である。これらの値は上記の純金融資産の状況を直接表すものではないが，家計については貯蓄額はある程度近い値を示している。各部門の純金融資産額を測定するためには別の作業を必要とし，その作業による実証はなされていないが，以下では理論的な仮定による相互の関連を考える。

各部門の純金融資産の動きを推測するための研究がいくつか見られ，家計については，例えばAttanasio and DeLeire（2002）は過去10年から15年の間に米国で国全体の貯蓄率が劇的に減少し，また他の先進国でも減少しているが，米国の主要な要因は個人貯蓄率の減少にあると述べ，貯蓄率を上昇させるために実施された税優遇貯蓄勘定（tax-favoured savings accounts）である個人退職者勘定（IRAs＝Individual Retirement Accounts）が，貯蓄増加にどれだけ寄与したかを分析しており，Bertaut（1998）は1983年には家計の20％が株式を所有していたが，1992年には28％に増加したと述べ，所得や教育水準等による株式保有の状況を分析し，Finkelstein and Poterba（2002）は英国の1990年以降の利

（1） 資産は各種に分類されている。例えば，⑴現金・預金・在庫品・原料・売掛金等の流動資産と土地・家屋・設備等の流通を目的とせず消耗品でもないような固定資産，⑵土地や建物・立ち木等の容易にその所在を変えることが出来ない不動産と不動産以外のすべての財産である現金・商品等の動産，⑶土地・家屋・金銭等の法律で資本にすることができる財産である資産と，他から借りた金銭や物資である負債である。以下では第三の分類のなかの金融資産と金融負債について考える。

子率の低下が年金保険料に比して年金支払い額の低下を招いたと述べている。

Laitner（2002）は，米国の 1995 年の個人の財産の分布が上位 5％の所有者が個人純財産の 56％を，上位 1％で 35％を占めており，個人の平均値が＄212,000, 中位値が＄57,000 であることから，個人貯蓄の検討は巨大な財産をもつ少数者と非常に少ない財産の多数者を別個に行わなければならないと述べ，Wolff（2002）は米国の Federal Reserve Board の資料をもとに 1998 年の相続や贈与による個人財産の移転を調べ，年間所得＄15,000 以下の家計が移転を受けた割合は 13.7％，平均移転額は＄155,400, 年間所得＄250,000 以上の家計が移転を受けた割合は 38.9％，平均移転額は＄2,416,800 であり，財産額＄25,000 以下の家計が移転を受けた割合は 9.9％，平均移転額は＄52,700, 財産額＄1,000,000 以上の家計が移転を受けた割合は 44.9％，平均移転額は＄1,325,900 であり，一部の家計への富の偏在が進んでいると説明している。また Dynan, Skinner, and Zeldes（2002）はユーラシア大陸では高い死亡率や少ない人口，低い生産性の伸び等のために相続した財産は全財産の 91％，先進諸国では平均 43％であるという調査から，資本の蓄積には遺産が大きな役割を果たし，遺産は個人の生活史（life-cycle）のなかでの貯蓄志向によると分析し，Guariglia and Rossi（2002）は生活史のなかで消費や貯蓄がどのように変遷するかを理論的に検討している。

企業については Morck, Shleifer and Vishny（1989）は公的企業の重役会が企業の維持や健全な経営にどれだけ役立っているかを米国の 454 社について分析しており，重役会の判断は企業の純資産の変化に関係していると推測し，Bolton and Freixas（2000）は危険な企業は銀行からの借金を，安全な企業は社債の発行を，中間の企業は株式と社債の両方の発行を選択する傾向が強いと述べ，企業の状況によって資産内容が変化することを示唆している。

公共機関については各種の数値資料から純金融資産の動きを分析するほかはないが，部門全体については，Levine and Zervos（1998）は 1976 年から 1993 年までの 47 ヵ国の資料から株式市場の流動性や銀行の発展が経済成長や資本蓄積，生産性の改善に強く関連していると述べ，Brocato（1998）は 9 種類の資産，

①一般株式（common stocks），②小規模株式（small capitalization stocks），③財務省証券（Treasury bills），④長期国債（lomg-term government bonds），⑤中期国債（intermediate government bonds），⑥長期社債（long-term corporate bonds），⑦不動産（real estate），⑧外国株式（foreign stocks），⑨貴金属（precious metals），の価格や収益が景気変動により変化し，株式は上昇期に，債券関係は下降期に有利であると分析し，純金融資産の経済環境との関連を示唆している。

1. 部門間の純金融資産の関連

t 時点の各部門の金融資産額を $X_i(t)(i=1, 2, 3)$，金融負債額を $S_i(t)$ と表せば，t 時点の金融資産と金融負債の差額である「純金融資産」$Y_i(t)$ は $Y_i(t)=(X_i(t)-S_i(t))$ である。各部門の金融資産や金融負債がどのような要因によって変化しているかは明らかではないが，社会全般をみれば，自己の部門や他の部門の純金融資産の状態に関連しているのではないかと憶測される。例えば家計の現金や預貯金は，企業の純金融資産が正で増加し，公共機関の税収が増大し公債や借入れが減少する時期には増加すると考えられ，企業や公共機関の金融資産も家計やその他の部門の純金融資産がプラスの方向に増大すれば増加すると推測される。公共機関では過去の公債や負債が多額に上り金融資産が少し増加しても純金融資産が正に転じない状況が続くこともありうるが，純金融資産のマイナスが減りプラスの方向に向かうときは，家計や企業の金融資産は増大の方向にあると想定できる。

1−1. 相互関連の数式的表現

それでは純金融資産の相互的な関連はどうであろうか。純金融資産の増減は通常景気の動きに正の関連を有し，他部門の増減は自己の部門の増減にも影響すると考えられる。したがって純金融資産の増減は一般的には

$$d(X_i(t)-S_i(t))/dt$$
$$=f_{i1}(X_1(t)-S_1(t))+f_{i2}(X_2(t)-S_2(t))$$

$+f_{i3}(X_3(t)-S_3(t)) \qquad i=1,\ 2,\ 3$

と表現することができ，$Y_i(t)=(X_i(t)-S_i(t))$ を代入すれば，

$$dY_i(t)/dt=f_{i1}(Y_1(t))+f_{i2}(Y_2(t))+f_{i3}(Y_3(t)) \tag{1}$$

である。

(1) の右辺の関数の形状は社会の状況によって異なるが，もし定数によって近似され，最も簡単に表現されれば，例えば，

$$dY_i(t)/dt=a_{i1}Y_1(t)+a_{i2}Y_2(t)+a_{i3}Y_3(t) \qquad i=1,\ 2,\ 3 \tag{2}$$

と表される。(2) は t 時点の各部門の純金融資産が一定関係でそれぞれの金融資産の増減に影響を及ぼすことを示している。例えば家計の純金融資産の増減は三部門の純金融資産の状態に依存し，すべての係数が正であれば三部門の純金融資産が t 時点に正であれば，正の追加額があり，すべての係数が負であれば三部門の純金融資産が t 時点に正であれば，負の減少額が発生する。部門間の相互関連を知るために，以下では (2) によって純金融資産の時間的な動きを考える。

1−2. 第一例

(2) を部門ごとに表示すれば，

$$\begin{cases} dY_1(t)/dt=a_{11}Y_1(t)+a_{12}Y_2(t)+a_{13}Y_3(t) \\ dY_2(t)/dt=a_{21}Y_1(t)+a_{22}Y_2(t)+a_{23}Y_3(t) \\ dY_3(t)/dt=a_{31}Y_1(t)+a_{32}Y_2(t)+a_{33}Y_3(t) \end{cases} \tag{3}$$

の関係が想定され，行列表示では

$$dY(t)/dt=AY(t), \tag{4}$$

$$Y(t)=\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_3(t) \end{bmatrix},\ dY(t)/dt=\begin{bmatrix} dY_1(t)/dt \\ dY_2(t)/dt \\ dY_3(t)/dt \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

と表される。

最初の例として１次回帰式によって一定期間 $t=0$ から $t=T$ の間に統計的に

測定された係数 A の値として次のような値

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.005 \\ 0.02 & 0.05 & 0.02 \\ 0.002 & 0.03 & 0.01 \end{bmatrix} \tag{5}$$

が抽出された場合を考える[(2)]。この値は家計の純金融資産は家計自身の金融資産の 1%，企業の 2%，公共機関の 0.5% を加えた割合で変化し，企業の純金融資産は家計の 2%，企業自身の 5%，公共機関の 2% を加えた割合で変化し，公共機関の純金融資産は家計の 0.2%，企業の 3%，公共機関自身の 1% を加えた割合で変化することを表している。

この係数の値のもとでは t 時点の各部門の純金融資産額が正であればどの部門の純金融資産も増加するが，ある部門の純金融資産が正で他の部門の純金融資産が負であれば係数の値によって純金融資産が増加する部門と減少する部門とが生じる。

それではこの係数値のもとで各部門の純金融資産 Y_1，Y_2，Y_3 はどのように推移するであろうか。

1−3. 第一例の一般解

(5) の係数により (4) を解けば，一般解は[(3)]

$$Y=C_1\begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.5761 \\ 1.3595 \end{bmatrix}\exp(0.0683t)+C_2\begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.4301 \\ 2.8769 \end{bmatrix}\exp(-0.0042t)$$

$$+C_3\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.1002 \\ -1.2210 \end{bmatrix}\exp(0.0059t) \tag{6}$$

となる。

(2) 係数の値は，dY_i/dt を独立変数，Y_i を従属変数にとり，一定期間内の各区分期間の資料に回帰分析を施すことによって得ることができる。

（3）$dY = AYdt$ の一般解は次のようにして求めることができる。連立常微分方程式の一般的な解法にしたがって，$Y_1 = \xi_1 e^{\lambda t}$，$Y_2 = \xi_2 e^{\lambda t}$，$Y_3 = \xi_3 e^{\lambda t}$，とおけば，(4) と (5) より，

$$\begin{cases} \lambda\xi_1 = 0.01\xi_1 + 0.02\xi_2 + 0.005\xi_3 \\ \lambda\xi_2 = 0.02\xi_1 + 0.05\xi_2 + 0.02\xi_3 \\ \lambda\xi_3 = 0.002\xi_1 + 0.03\xi_2 + 0.01\xi_3 \end{cases} \tag{1}$$

が得られる。係数行列 A から単位行列 I に λ を乗じた値を引いた行列（$A - \lambda \mathrm{I}$）の行列式 (determinant) である $det(A - \lambda \mathrm{I})$ は,

$$det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} (0.01 - \lambda) & 0.02 & 0.005 \\ 0.02 & (0.05 - \lambda) & 0.02 \\ 0.002 & 0.03 & (0.01 - \lambda) \end{vmatrix} \tag{2}$$

であり，特性方程式 $det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$ が成立しなければならない。固有値 λ はこの方程式の根として決まる。$det(A - \lambda \mathrm{I})$ は,

$$det(A - \lambda \mathrm{I}) = -\lambda^3 + 0.07\lambda^2 - 0.00009\lambda - 0.0000017 \tag{3}$$

であり,

$$-\lambda^3 + 0.07\lambda^2 - 0.00009\lambda - 0.0000017 = 0 \tag{4}$$

を解けば，$\lambda_1 \fallingdotseq 0.068318$，$\lambda_2 \fallingdotseq -0.004218$，$\lambda_3 \fallingdotseq 0.005899$ が得られる。

最初に λ の値として，$\lambda = \lambda_1 \fallingdotseq 0.068318$ を想定し，(1) に代入すれば,

$$\begin{cases} 0.068318\xi_1^1 = 0.01\xi_1^1 + 0.02\xi_2^1 + 0.005\xi_3^1 \\ 0.068318\xi_2^1 = 0.02\xi_1^1 + 0.05\xi_2^1 + 0.02\xi_3^1 \\ 0.068318\xi_3^1 = 0.002\xi_1^1 + 0.03\xi_2^1 + 0.01\xi_3^1 \end{cases} \tag{5}$$

である。$\xi_1^1 = 1$ を仮定して，(10) の最初の二式に代入すれば,

$$\begin{cases} 1 = 0.342947\xi_2^1 + 0.085737\xi_3^1 \\ 1 = 0.915900\xi_2^1 - \xi_3^1 \end{cases} \tag{6}$$

であり，この連立方程式を解けば，$\xi_2^1 \fallingdotseq 2.576050$，$\xi_3^1 \fallingdotseq 1.359405$ である。$\xi_1^1 = 1$ を仮定して，第 2，第 3 の二式に代入すれば,

$$\begin{cases} 1 = 0.915900\xi_2^1 - \xi_3^1 \\ 1 = -15\xi_2^1 + 29.1590\xi_3^1 \end{cases} \tag{7}$$

であり，この連立方程式を解けば，$\xi_2^1 \fallingdotseq 2.576211$，$\xi_3^1 \fallingdotseq 1.359552$ である。(6) と (7) の解には，四捨五入による計算上の誤差が生じているが，解の値はほぼ同じであり，中間の値をとれば，ξ_1^1，ξ_2^1，ξ_3^1 の比率

$$\xi_1^1 : \xi_2^1 : \xi_3^1 = 1 : 2.5761 : 1.3595 \tag{8}$$

が得られる。

次に λ に $\lambda = \lambda_2 \fallingdotseq -0.004218$ を想定し，上と同様に計算すれば,

$$\xi_1^2 : \xi_2^2 : \xi_3^2 = 1 : -1.4301 : 2.8769 \tag{9}$$

が得られる。また λ に $\lambda = \lambda_3 \fallingdotseq 0.005899$ を想定し，同様に計算すれば,

$$\xi_1^3 : \xi_2^3 : \xi_3^3 = 1 : 0.1002 : -1.2210$$

が得られる。

2.　第一例の純金融資産の推移

一般解が（6）であるとき，0 時点の純金融資産の状況によって各部門の純金融資産は以後どのような推移をたどるであろうか。以下では 0 時点にいくつかの異なる値を想定し，以後の動きを考える。

2－1.　公共機関だけが負の初期値

最初に公共機関だけが負の初期値のときを考える。値の単位は 1 兆円，1 億ドル等任意であり，例示的に適当な数値を仮定する。

（1）初期値〔100，200，－100〕

最初に各部門の値が，〔家計，企業，公共機関〕＝〔100，200，－100〕の場合を考える。このとき一般解は[(4)]，

$$Y = 57.6334\begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.5761 \\ 1.3595 \end{bmatrix}\exp(0.0683t) - 30.8995\begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.4301 \\ 2.8769 \end{bmatrix}\exp(-0.0042t)$$

一般解は

$$Y = C_1\begin{bmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \xi_3^1 \end{bmatrix}\exp(\lambda_1 t) + C_2\begin{bmatrix} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \\ \xi_3^2 \end{bmatrix}\exp(\lambda_2 t) + C_3\begin{bmatrix} \xi_1^3 \\ \xi_2^3 \\ \xi_3^3 \end{bmatrix}\exp(\lambda_3 t) \tag{10}$$

であるために，小数点以下 5 桁を四捨五入してそれぞれの値を代入すれば，

$$Y = C_1\begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.5761 \\ 1.3595 \end{bmatrix}\exp(0.0683t) + C_2\begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.4301 \\ 2.8769 \end{bmatrix}\exp(-0.0042t)$$

$$+ C_3\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.1002 \\ -1.2210 \end{bmatrix}\exp(0.0059t) \tag{11}$$

となる。

$$+73.2661\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.1002 \\ -1.2210 \end{bmatrix}\exp(0.0059t) \tag{7}$$

であり，t の値を代入すれば，各時点の純金融資産が求められる。

t が 1 から 10 の整数値をとるとき，各時点の純金融資産は以下のように推移する。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	104.6	109.6	114.8	120.4	126.3	132.6	139.3	146.5	154.1	162.2
Y_2	200	210.4	221.4	233.3	246.1	259.7	274.4	290.0	306.8	324.8	344.1
Y_3	−100	−94.6	−88.8	−82.7	−76.0	−68.9	−61.3	−53.2	−44.4	−35.1	−25.0

(2) 初期値［300, 200, −100］

次に各部門の値が,〔家計，企業，公共機関〕=〔300, 200, −100〕の場合を考える。最初の例に比べ家計の値が 3 倍になっている。この初期値の一般解は,

$$Y=78.3201\begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.5761 \\ 1.3595 \end{bmatrix}\exp(0.0683t)+15.6653\begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.4301 \\ 2.8769 \end{bmatrix}\exp(-0.0042t)$$

$$+206.0146\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.1002 \\ -1.2210 \end{bmatrix}\exp(0.0059t) \tag{8}$$

であり，t の値を代入すれば，各時点の純金融資産が求められる。

（4）t の各時点の値を計算するために,（6）に初期値を代入すれば,

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ -100 \end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.5761 \\ 1.3595 \end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.4301 \\ 2.8769 \end{bmatrix}+C_3\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.1002 \\ -1.2210 \end{bmatrix} \tag{1}$$

であり,（1）を解くことにより，三つの未知数 C_1, C_2, C_3 が,〔C_1, C_2, C_3〕=〔57.6334, −30.8995, 73.2661〕として求められる。これらの値を（6）に代入すれば，この初期値のもとでの一般解が得られる。

t が1から10の整数値をとるとき，各時点の純金融資産は以下のように推移する。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	300	306.7	313.8	321.3	329.3	337.7	346.7	356.3	366.4	377.2	388.6
Y_2	200	214.5	230.0	246.5	264.3	283.2	303.5	325.2	348.4	373.3	400.0
Y_3	−100	−94.2	−87.8	−80.8	−73.3	−65.1	−56.3	−46.6	−36.2	−25.0	−12.8

(3)　初期値〔100, 200, −300〕

各部門の値が,〔家計，企業，公共機関〕=〔100, 200, −300〕の場合を考える。最初の例に比べ公共機関の値が3倍になっている。この一般解は,

$$Y = 35.9192\begin{bmatrix}1.000\\2.5761\\1.3595\end{bmatrix}\exp(0.0683t) - 66.0313\begin{bmatrix}1.0000\\-1.4301\\2.8769\end{bmatrix}\exp(-0.0042t)$$

$$+130.1121\begin{bmatrix}1.0000\\0.1002\\-1.2210\end{bmatrix}\exp(0.0059t) \tag{9}$$

であり，t が1から10の整数値をとるとき，各時点の純金融資産は以下のように推移する。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	103.6	107.4	111.3	115.5	119.9	124.5	129.4	134.6	140.0	145.8
Y_2	200	206.2	212.9	220.1	227.8	236.1	245.0	254.5	264.8	275.8	287.6
Y_3	−300	−296.7	−293.1	−289.4	−285.3	−280.9	−276.3	−271.3	−265.9	−260.2	−254.0

(4)　三例の比較

公共機関だけが負の初期値をとるとき，上記のように初期値が異なれば，以後の推移はどのように相違するであろうか。以下は最初の例を基準にした他の初期値との差異である。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	104.6	109.6	114.8	120.4	126.3	132.6	139.3	146.5	154.1	162.2
x_1^2	200	202.1	204.2	206.5	208.9	211.4	214.1	217.0	219.9	223.1	226.4
x_1^3	0	−1.0	−2.2	−3.5	−4.9	−6.4	−8.1	−9.9	−11.9	−14.1	−16.4
Y_2	200	210.4	221.4	233.3	246.1	259.7	274.4	290.0	306.8	324.8	344.1
x_2^2	0	4.1	8.6	13.2	18.2	23.5	29.1	35.2	41.6	48.5	55.9
x_2^3	0	−4.2	−8.5	−13.2	−18.3	−23.6	−29.4	−35.5	−42.0	−49.0	−56.5
Y_3	−100	−94.6	−88.8	−82.7	−76.0	−68.9	−61.3	−53.2	−44.4	−35.1	−25.0
x_3^2	0	0.4	1.0	1.9	2.7	3.8	5.0	6.6	8.2	10.1	12.2
x_3^3	−200	−202.1	−204.3	−206.7	−209.3	−212.0	−215.0	−218.1	−221.5	−225.1	−229.0

$x_i^j(i=1,\ 2,\ 3 \quad j=2,\ 3)$ は最初の例との差額を表している。2 番目の例は家計の初期値が 200 超過しているだけであるが，その影響によって企業や公共機関の以後の値が変化し，10 時点で家計が 226.4，企業が 55.9，公共機関が 12.2 相違する。3 番目の例は公共機関の初期値が 200 不足しているだけであるが，その影響によって家計や企業の以後の値が変化し，10 時点で家計が−16.4，企業が−56.5，公共機関が−229.0 相違する。

2−2. 公共機関と企業が負の初期値

では公共機関と企業がともに負の初期値のときはどうであろうか。上記と同じ係数で，初期値も絶対値は同じであるが，企業の値が負の場合を考える。

(1) 初期値〔100，−200，−100〕

第一に各部門の値が，〔家計，企業，公共機関〕=〔100，−200，−100〕の場合を考える。この一般解は

$$Y = -58.6609\begin{bmatrix}1.000\\2.5761\\1.3595\end{bmatrix}\exp(0.0683t)+42.3325\begin{bmatrix}1.0000\\-1.4301\\2.8769\end{bmatrix}\exp(-0.0042t)$$

$$+116.3284\begin{bmatrix}1.0000\\0.1002\\-1.2210\end{bmatrix}\exp(0.0059t) \tag{10}$$

であり，t が1から10の整数値をとるとき，各時点の純金融資産は以下のように推移する。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	96.4	92.4	88.2	83.6	78.7	73.4	67.7	61.6	55.0	47.9
Y_2	−200	−210.4	−221.5	−233.4	−246.2	−260.0	−274.6	−290.4	−307.3	−325.4	−344.9
Y_3	−100	−107.0	−114.4	−122.2	−130.5	−139.2	−148.5	−158.4	−168.9	−180.0	−191.8

(2)　初期値［300，−200，−100］

次に各部門の値が，〔家計，企業，公共機関〕=〔300，−200，−100〕の場合を考える。最初の例に比べ家計の値が3倍になっている。この一般解は

$$Y=-37.9742\begin{bmatrix}1.000\\2.5761\\1.3595\end{bmatrix}\exp(0.0683t)+88.8974\begin{bmatrix}1.0000\\-1.4301\\2.8769\end{bmatrix}\exp(-0.0042t)$$

$$+249.0769\begin{bmatrix}1.0000\\0.1002\\-1.2210\end{bmatrix}\exp(0.0059t) \tag{11}$$

であり，各時点の純金融資産は以下のように推移する。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	300	298.4	296.7	294.7	292.5	290.2	287.5	284.6	281.5	278.0	274.3
Y_2	−200	−206.2	−213.0	−220.2	−228.0	−236.4	−245.5	−255.2	−265.7	−277.0	−289.1
Y_3	−100	−106.5	−113.3	−120.4	−127.7	−135.4	−143.5	−151.9	−160.7	−170.0	−179.6

(3)　初期値［100，−200，−300］

各部門の値が，〔家計，企業，公共機関〕=〔100，−200，−300〕の場合を考え

る。最初の例に比べ公共機関の値が３倍になっている。この一般解は

$$Y = -80.3751\begin{bmatrix}1.000\\2.5761\\1.3595\end{bmatrix}\exp(0.0683t)+7.2007\begin{bmatrix}1.0000\\-1.4301\\2.8769\end{bmatrix}\exp(-0.0042t)$$

$$+173.1744\begin{bmatrix}1.0000\\0.1002\\-1.2210\end{bmatrix}\exp(0.0059t) \qquad (12)$$

であり，各時点の純金融資産は以下のように推移する。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	95.3	90.2	84.7	78.8	72.3	65.3	57.8	49.7	40.9	31.5
Y_2	−200	−214.5	−230.0	−246.6	−264.5	−283.5	−304.0	−325.9	−349.4	−374.5	−401.4
Y_3	−300	−309.1	−318.7	−328.9	−339.7	−351.2	−363.5	−376.5	−390.3	−405.1	−420.8

(4)　三例の比較

公共機関と企業が負の初期値をとるとき，上記のように初期値が異なれば，以後の推移はどのように相違するであろうか。以下は最初の例を基準にした他の初期値との差異である。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	96.4	92.4	88.2	83.6	78.7	73.4	67.7	61.6	55.0	47.9
x_1^2	200	202.0	204.3	206.5	208.9	211.5	214.1	216.9	219.9	223.0	226.4
x_1^3	0	−1.1	−2.2	−3.5	−4.8	−6.4	−8.1	−9.9	−11.9	−14.1	−16.4
Y_2	−200	−210.4	−221.5	−233.4	−246.2	−260.0	−274.6	−290.4	−307.3	−325.4	−344.9
x_2^2	0	4.2	8.4	13.2	18.2	23.6	29.1	35.2	41.6	48.4	55.8
x_2^3	0	−4.1	−8.6	−13.2	−18.3	−23.5	−29.4	−35.5	−42.1	−49.1	−56.5
Y_3	−100	−107.0	−114.4	−122.2	−130.5	−139.2	−148.5	−158.4	−168.9	−180.0	−191.8
x_3^2	0	0.5	1.1	1.8	2.8	3.8	5.0	6.5	8.2	10.0	12.2
x_3^3	−200	−202.1	−204.3	−206.7	−209.2	−212.0	−215.0	−218.1	−221.4	−225.1	−229.0

$x_i^j (i=1,\ 2,\ 3 \quad j=2,\ 3)$ は最初の例との差額を表している。2 番目の例は家計の初期値が 200 超過しているだけであるが，その影響によって企業や公共機関の以後の値が変化し，10 時点で家計が 226.4，企業が 55.8，公共機関が 12.2 相違する。3 番目の例は公共機関の初期値が 200 不足しているだけであるが，その影響によって家計や企業の以後の値が変化し，10 時点で家計が－16.4，企業が－56.5，公共機関が－229.0 相違する。

x_i^j に着目すれば，1 番目の基準値との差異は，公共機関だけが負の場合とほぼ同じである。企業の初期値の正負が変わっても，他の値との差異は変わらないことがわかる。

(5) 公共機関だけが負の場合との比較

公共機関と企業が負の初期値をとるとき公共機関だけが負の場合に比べ以後の推移はどのように相違するであろうか。以下は最初の例について，公共機関だけが負の場合を基準に，公共機関と企業が負の初期値をとるときの差異を表している。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	104.6	109.6	114.8	120.4	126.3	132.6	139.3	146.5	154.1	162.2
y_1^2	0	−8.2	−17.2	−26.6	−36.8	−47.6	−59.2	−71.6	−84.9	−99.1	−114.3
Y_2	200	210.4	221.4	233.3	246.1	259.7	274.4	290.0	306.8	324.8	344.1
y_2^2	−400	−420.8	−442.9	−466.7	−492.3	−519.7	−549.0	−580.4	−614.1	−650.2	−689.0
Y_3	−100	−94.6	−88.8	−82.7	−76.0	−68.9	−61.3	−53.2	−44.4	−35.1	−25.0
y_3^2	0	−12.4	−25.6	−39.5	−54.5	−70.3	−87.2	−105.2	−124.5	−144.9	−166.8

$y_i^j (i=1,\ 2,\ 3 \quad j=2)$ は公共機関だけが負の場合との差額を表している。初期値は企業だけが 400 不足しているが，その影響によって 10 時点では差額が家計が－114.3，企業が－689.0，公共機関が－166.8 であり，時間の経過とともにいずれも不足額が増大する。

3. 第二例

第二の例として1次回帰式によって一定期間 $t=0$ から $t=T$ の間に統計的に測定された係数 A が次のような値

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.02 & 0.04 & 0.01 \\ 0.04 & 0.10 & 0.04 \\ 0.004 & 0.06 & 0.02 \end{bmatrix} \tag{13}$$

をとる場合を考える。この値は家計の純金融資産は，家計自身の金融資産の2%，企業の4%，公共機関の1%を加えた割合で変化し，企業の純金融資産は，家計の4%，企業自身の10%，公共機関の4%を加えた割合で変化し，公共機関の純金融資産は，家計の0.4%，企業の6%，公共機関自身の2%を加えた割合で変化することを表している。

この係数は第一例に比べすべての値が2倍になっている。係数がすべて2倍になれば各部門の純金融資産はどのように推移するであろうか。

3−1. 第二例の一般解

第二例の一般解は，(13) の係数を (4) に代入し，その式を解くことによって得られ，

$$Y=C_1\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 2.5760 \\ 1.3595 \end{bmatrix}\exp(0.1366t)+C_2\begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.4301 \\ 2.8769 \end{bmatrix}\exp(-0.0084t)$$
$$+C_3\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.1002 \\ -1.2210 \end{bmatrix}\exp(0.0118t) \tag{14}$$

となる。[5]

3－2. 第二例の純金融資産の推移

第一例と比較すれば，計算上の僅かの誤差が存在するが，一般解の係数は同じで，指数部分が2倍になっている。そうであれば純金融資産の初期値が同じであれば，定数 C_1，C_2，C_3 が同じ値になり，0時点以後の推移が指数部分によって相違する。上記の第一例と同じ初期値をとるときの純金融資産の推移を計算すれば以下のようになる。

3－2－1. 公共機関だけが負の初期値

最初に公共機関だけが負の初期値のときは以下のようになる。

(1) 初期値〔100，200，－100〕

各部門の値が，〔家計，企業，公共機関〕＝〔100，200，－100〕の場合は，定数 C_1，C_2，C_3 は上記の例と同じであるために，一般解は，

（5）一般的な解法にしたがって，$Y_1=\xi_1 e^{\lambda t}$，$Y_2=\xi_2 e^{\lambda t}$，$Y_3=\xi_3 e^{\lambda t}$，とおけば，(4) と (13) より，

$$\begin{cases} \lambda\xi_1=0.02\xi_1+0.04\xi_2+0.01\xi_3 \\ \lambda\xi_2=0.04\xi_1+0.10\xi_2+0.04\xi_3 \\ \lambda\xi_3=0.004\xi_1+0.06\xi_2+0.02\xi_3 \end{cases} \tag{1}$$

が得られる。係数行列 A から単位行列 I に λ を乗じた値を引いた行列 $(A-\lambda\mathrm{I})$ の行列式 $det(A-\lambda\mathrm{I})$ は，

$$det(A-\lambda\mathrm{I})=-\lambda^3+0.14\lambda^2-0.00036\lambda-0.0000136 \tag{2}$$

であり，特性方程式 $det(A-\lambda\mathrm{I})=0$ が成立しなければならない。固有値 λ はこの方程式の根として決まり，

$$-\lambda^3+0.14\lambda^2-0.00036\lambda-0.0000136=0 \tag{3}$$

を解けば，$\lambda_1\fallingdotseq 0.136637$，$\lambda_2\fallingdotseq -0.008436$，$\lambda_3\fallingdotseq 0.011799$ が得られる。

λ_1，λ_2，λ_3 の値について $\xi_i^j=(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ の比率を求めれば，

$$\begin{aligned} &\xi_1^1:\xi_2^1:\xi_3^1=1:2.5760:1.3595, \\ &\xi_1^2:\xi_2^2:\xi_3^2=1:-1.4301:2.8769, \\ &\xi_1^3:\xi_2^3:\xi_3^3=1:0.1002:-1.2210 \end{aligned} \tag{4}$$

が得られ，小数点以下5桁を四捨五入して (10) に代入すれば，一般解が得られる。

$$Y = 57.6334\begin{bmatrix}1.0000\\2.5760\\1.3595\end{bmatrix}\exp(0.1366t) - 30.8995\begin{bmatrix}1.0000\\-1.4301\\2.8769\end{bmatrix}\exp(-0.0084t)$$

$$+73.2661\begin{bmatrix}1.0000\\0.1002\\-1.2210\end{bmatrix}\exp(0.0118t) \tag{15}$$

であり，t が 1 から 10 の整数値をとるとき，各時点の純金融資産は以下のように推移する。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	109.6	120.4	132.6	146.5	162.2	180.1	200.4	223.5	249.9	279.9
Y_2	200	221.4	246.1	274.4	306.8	344.1	386.8	435.9	492.2	556.8	630.8
Y_3	−100	−88.8	−76.0	−61.3	−44.4	−25.0	−2.7	22.9	52.3	86.0	124.7

(2) 初期値〔300，200，−100〕

各部門の値が，〔家計，企業，公共機関〕=〔300，200，−100〕の場合は，上の例に比べ家計の値が 3 倍になっている。このとき一般解は，

$$Y = 78.3201\begin{bmatrix}1.0000\\2.5761\\1.3595\end{bmatrix}\exp(0.1366t) + 15.6653\begin{bmatrix}1.0000\\-1.4301\\2.8769\end{bmatrix}\exp(-0.0084t)$$

$$+206.0146\begin{bmatrix}1.0000\\0.1002\\-1.2210\end{bmatrix}\exp(0.0118t) \tag{16}$$

であり，各時点の純金融資産は以下のように推移する。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	300	313.8	329.3	346.7	366.4	388.6	413.8	442.3	474.7	511.4	553.2
Y_2	200	230.0	264.3	303.5	348.4	399.9	458.8	526.2	603.5	692.0	793.5
Y_3	−100	−87.8	−73.3	−56.3	−36.2	−12.8	14.5	46.3	83.3	126.1	175.7

(3) 初期値〔100, 200, −300〕

各部門の値が,〔家計, 企業, 公共機関〕=〔100, 200, −300〕の場合は, 最初の例に比べ公共機関の値が3倍になっている。この一般解は,

$$Y = 35.9192\begin{bmatrix}1.0000\\2.5760\\1.3595\end{bmatrix}\exp(0.1366t) - 66.0313\begin{bmatrix}1.0000\\-1.4301\\2.8769\end{bmatrix}\exp(-0.0084t)$$

$$+130.1121\begin{bmatrix}1.0000\\0.1002\\-1.2210\end{bmatrix}\exp(0.0118t) \tag{17}$$

であり, 各時点の純金融資産は以下のようになる。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	107.4	115.5	124.5	134.6	145.8	158.4	172.5	188.4	206.3	226.5
Y_2	200	212.9	227.8	245.0	264.8	287.6	313.8	343.9	378.6	418.4	464.2
Y_3	−300	−293.1	−285.3	−276.3	−265.9	−254.0	−240.3	−224.6	−206.6	−185.8	−162.0

(4) 三例の比較

異なる係数のとき, 公共機関だけが負の初期値をとれば, 上記のように初期値が異なれば, 以後の推移はどのように相違するであろうか。以下は最初の例を基準にした他の初期値での推移との差異である。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	109.6	120.4	132.6	146.5	162.2	180.1	200.4	223.5	249.9	279.9
x_1^2	200	204.2	208.9	214.1	219.9	226.4	233.7	241.9	251.2	261.5	273.3
x_1^3	0	−2.2	−4.9	−8.1	−11.9	−16.4	−21.7	−27.9	−35.1	−43.6	−53.4
Y_2	200	221.4	246.1	274.4	306.8	344.1	386.8	435.9	492.2	556.8	630.8
x_2^2	0	8.6	18.2	29.1	41.6	55.8	72.0	90.3	111.3	135.2	162.7
x_2^3	0	−8.5	−18.3	−29.4	−42.0	−56.5	−73.0	−92.0	−113.6	−138.4	−166.6
Y_3	−100	−88.8	−76.0	−61.3	−44.4	−25.0	−2.7	22.9	52.3	86.0	124.7
x_3^2	0	1.0	2.7	5.0	8.2	12.2	17.2	23.4	31.0	40.1	51.0
x_3^3	−200	−204.3	−209.3	−215.0	−221.5	−229.0	−237.6	−247.5	−258.9	−271.8	−286.7

2 番目の例は家計の初期値が 200 超過しているだけであるが，その影響によって企業や公共機関の以後の値が変化し，10 時点で家計が 273.3，企業が 162.7，公共機関が 51.0 相違する。3 番目の例は公共機関の初期値が 200 不足しているだけであるが，その影響によって家計や企業の以後の値が変化し，10 時点で家計が−53.4，企業が−166.6，公共機関が−286.7 相違する。

3−2−2. 公共機関と企業が負の初期値

公共機関と企業がともに負の初期値のときはどうであろうか。

(1) 初期値〔100，−200，−100〕

最初に各部門の値が，〔家計，企業，公共機関〕=〔100，−200，−100〕の場合には，一般解は，

$$Y = -58.6609\begin{bmatrix}1.0000\\2.5760\\1.3595\end{bmatrix}\exp(0.1366t)+42.3325\begin{bmatrix}1.0000\\-1.4301\\2.8769\end{bmatrix}\exp(-0.0084t)$$

$$+116.3284\begin{bmatrix}1.0000\\0.1002\\-1.2210\end{bmatrix}\exp(0.0118t) \tag{18}$$

であり，各時点の純金融資産は以下のようである。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	92.4	83.6	73.4	61.6	47.9	32.0	13.6	−7.5	−32.0	−60.1
Y_2	−200	−221.5	−246.2	−274.6	−307.3	−344.9	−388.0	−437.6	−494.5	−559.8	−634.8
Y_3	−100	−114.4	−130.5	−148.5	−168.9	−191.8	−217.7	−246.9	−280.1	−317.7	−360.4

(2) 初期値〔300，−200，−100〕

次に各部門の値が，〔家計，企業，公共機関〕=〔300，−200，−100〕の場合は，最初の例に比べ家計の値が3倍になっている。この一般解は，

$$Y = -37.9742\begin{bmatrix}1.0000\\2.5760\\1.3595\end{bmatrix}\exp(0.1366t)+88.8974\begin{bmatrix}1.0000\\-1.4301\\2.8769\end{bmatrix}\exp(-0.0084t)$$

$$+249.0769\begin{bmatrix}1.0000\\0.1002\\-1.2210\end{bmatrix}\exp(0.0118t) \tag{19}$$

であり，各時点の純金融資産は以下のように推移する。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	300	296.7	292.5	287.5	281.5	274.3	265.7	255.5	243.6	229.6	213.2
Y_2	−200	−213.0	−228.0	−245.5	−265.7	−289.1	−316.1	−347.2	−383.2	−424.6	−472.2
Y_3	−100	−113.3	−127.7	−143.5	−160.7	−179.6	−200.4	−223.5	−249.1	−277.6	−309.4

(3) 初期値〔100，−200，−300〕

各部門の値が，〔家計，企業，公共機関〕=〔100，−200，−300〕の場合は，最初の例に比べ公共機関の値が3倍になっている。この一般解は，

$$Y = -80.3751\begin{bmatrix}1.0000\\2.5760\\1.3595\end{bmatrix}\exp(0.1366t)+7.2007\begin{bmatrix}1.0000\\-1.4301\\2.8769\end{bmatrix}\exp(-0.0084t)$$

$$+173.1744\begin{bmatrix}1.0000\\0.1002\\-1.2210\end{bmatrix}\exp(0.0118t) \tag{20}$$

であり，各時点の純金融資産は以下のように推移する。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	90.2	78.8	65.4	49.7	31.5	10.3	−14.2	−42.7	−75.6	−113.6
Y_2	−200	−230.0	−264.5	−304.0	−349.3	−401.4	−461.1	−529.6	−608.1	−698.2	−801.5
Y_3	−300	−318.7	−339.7	−363.5	−390.3	−420.8	−455.3	−494.4	−538.9	−589.5	−647.2

(4)　三例の比較

異なる係数のもとで，公共機関と企業が負の初期値をとるとき，上記のように初期値が異なれば，以後の推移はどのように相違するであろうか。以下は最初の例を基準にした他の初期値との差異である。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	92.4	83.6	73.4	61.6	47.9	32.0	13.6	−7.5	−32.0	−60.1
x_1^2	200	204.3	208.9	214.1	219.9	226.4	233.7	241.9	251.1	261.6	273.3
x_1^3	0	−2.2	−4.8	−8.0	−11.9	−16.4	−21.7	−27.8	−35.2	−43.6	−53.5
Y_2	−200	−221.5	−246.2	−274.6	−307.3	−344.9	−388.0	−437.6	−494.5	−559.8	−634.8
x_2^2	0	8.5	18.2	29.1	41.6	55.8	71.9	90.4	111.3	135.2	162.6
x_2^3	0	−8.5	−18.3	−29.4	−42.0	−56.5	−73.1	−92.0	−113.6	−139.2	−166.7
Y_3	−100	−114.4	−130.5	−148.5	−168.9	−191.8	−217.7	−246.9	−280.1	−317.7	−360.4
x_3^2	0	1.1	2.8	5.0	8.2	12.2	17.3	23.4	31.0	40.1	51.0
x_3^3	−200	−204.3	−209.2	−215.0	−221.4	−229.0	−237.6	−247.5	−258.8	−271.8	−286.8

2 番目の例は家計の初期値が 200 超過しているだけであるが，その影響によって企業や公共機関の以後の値が変化し，10 時点で家計が 273.3，企業が 162.7，公共機関が 51.0 相違する。3 番目の例は公共機関の初期値が 200 不足しているだけであるが，その影響によって家計や企業の以後の値が変化し，10 時点で家計が−53.5，企業が−166.7，公共機関が−286.8 相違する。

x_i^j に着目すれば，1 番目の基準値との差異は，公共機関だけが負の場合とほぼ同じである。企業の初期値の正負が変わっても，他の値との差異は変わらないことがわかる。

(5) 公共機関だけが負の場合との比較

第二例の係数のもとで公共機関だけが負の初期値の場合と公共機関と企業が負の初期値をとるときとでは以後の推移はどのように相違するであろうか。以下は最初の例について，公共機関だけが負の場合を基準に，公共機関と企業が負の初期値をとるときとの差異を表している。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	109.6	120.4	132.6	146.5	162.2	180.1	200.4	223.5	249.9	279.9
y_1^2	0	−17.2	−36.8	−59.2	−84.9	−114.3	−148.1	−186.8	−231.0	−281.9	−340.0
Y_2	200	221.4	246.1	274.4	306.8	344.1	386.8	435.9	492.2	556.8	630.8
y_2^2	−400	−442.9	−492.3	−549.0	−614.1	−689.0	−774.8	−873.5	−986.7	−1116.6	−1265.6
Y_3	−100	−88.8	−76.0	−61.3	−44.4	−25.0	−2.7	22.9	52.3	86.0	124.7
y_3^2	0	−25.6	−54.5	−87.2	−124.5	−166.8	−215.0	−269.8	−332.4	−403.7	−485.1

y_i^j($i=1,\ 2,\ 3 \quad j=2$) は公共機関だけが負の場合との差額を表している。初期値は企業だけが 400 不足しているが，その影響によって 10 時点では家計が−340.0，企業が−1265.6，公共機関が−485.1 と，時間の経過とともにいずれも不足額が増大する。

3−3. 係数が異なる場合の比較

第二例の係数は第一例の 2 倍になっている。係数が 2 倍になれば同じ初期値のもとでその後の値はどのように異なるであろうか。以下は各係数の公共機関だけが負の場合の最初の例について，第一例を基準に，その差異を表している。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_1	100	104.6	109.6	114.8	120.4	126.3	132.6	139.3	146.5	154.1	162.2
z_1^2	0	5.0	10.8	17.8	26.1	35.9	47.5	61.1	77.0	95.8	117.7
Y_2	200	210.4	221.4	233.3	246.1	259.7	274.4	290.0	306.8	324.8	344.1
z_2^2	0	11.0	24.7	41.1	60.7	84.4	112.4	145.9	185.4	232.0	286.7
Y_3	−100	−94.6	−88.8	−82.7	−76.0	−68.9	−61.3	−53.2	−44.4	−35.1	−25.0
z_3^2	0	5.8	12.8	21.4	31.6	43.9	58.6	76.1	96.7	121.1	149.7

$z_i^j(i=1,\ 2,\ 3 \quad j=2)$ は，第一例の係数の値を基準にした，第二例の差額を表している。初期値はすべて同じであるが，係数が 2 倍になるために，10 時点では第二例の家計が 117.7，企業が 286.7，公共機関が 149.7 超過する。

参考文献

Attanasio, Orazio, P., and Thomas DeLeire, “The Effect of Individual Retirement Accounts on Household Consumption and National Saving”, Economic Journal, 112(2002), 504-38.

Bertaut, Carol C. “Stockholding Behavior of U.S. Households: Evidence From the 1983-1989 Survey of Consumer Finances,” Review of Economics and Statistics, 80(1998), 263-75.

Bolton, Patrick, and Xavier Freixas, “Equity, Bonds, and Bank Debt: Capital Structure and Financial Market Equilibrium under Asymmetric Information”, Journal of Political Economy, 108(2000), 324-51.

Brocato, Joe, “Optimal Asset Allocation over the Business Cycle,” Financial Review, 33(1998), 129-48.

Dynan, Karen E., Jonathan Skinner, and Stephen P. Zeldes, “The Importance of Bequests and Life-Cycle Saving in Capital Accumulation: A New Answer”, American Economic Association Papers and Proceedings, 92(2002), 274-8.

Finkelstein, Amy, and James Poterba, “Selection Effects in the United Kingdom Individual Annuities Market”, Economic Journal, 112(2002), 28-50.

Guariglia, Alessandra, and Mariacristina Rossi, “Consumption, Habit Formation, and Precautionary Saving: Evidence from the British Household Panel Survey”, Oxford Economic Papers, 54(2002), 1-19.

Laitner, John, “Wealth Inequality and Altruistic Bequests”, American Economic Association Papers and Proceedings 92(2002), 270-3.

Levine, Ross, and Sara Zervos, "Stock Markets, Banks, and Economic Growth," American Economic Review, 88 (1998), 537-58.

Morck, Randall, Andrei Shleifer, and Robert W. Vishny, "Alternative Mechanisms for Corporate Control," American Economic Review, 79 (1989), 842-52.

Wolff, Edward, "Inheritances and Wealth Inequality, 1989-1998", American Economic Association Papers and Proceedings, 92 (2002), 260-4.