

心理学研究における多要因計画について

—交互作用と一部実施法—

Multi-factor Design in Psychological Studies

—Interaction and Fractional Factorial Design—

菅 千 索

Sensaku SUGA

(心理学教室)

2004年10月5日受理

はじめに

分散分析においては、測定値（従属変数）の変動に対して何らかの「関係」があると予想される要因（独立変数）の効果が、推測統計学を用いて検討される。ただし、ここでいう「関係」とは、ほとんどの心理学研究の場合、原因・結果といった因果関係ではなく、相関的なもの、あるいは共変動的なものに限られている。さて通常、ひとまとまりの研究、あるいは1編の論文のなかに複数の従属変数が存在することも少なくないが、それは全体が2つ以上の実験計画によって構成されているためであって、基本となる個別の実験計画における従属変数は、つねに1つである（多変量分散分析などを前提とした実験計画は除く）。この従属変数については、間隔尺度以上の情報をもつ計量的データでなければならない。一方、単独の実験計画において複数の独立変数を同時に扱うことはよく行われており、1つの独立変数しかもたない1要因計画（single-factor design）に対して、多要因計画（multi-factor design）または単に要因計画（factorial design）とよばれている。この独立変数は名義尺度水準の定性的データでよい点が従属変数と異なる（独立変数も定量的データならば相関分析を利用すべきである）。一般に、もともとなる変数が順序尺度以上であっても、それを基準にグループ化が行われて独立変数とされることはよく行われている。たとえば、知能指数をもとにして被験者を知能の高・中・低という3群に分け、これを独立変数とするケースなどであるが、分散分析において3群の順序性（高>中>低）に関する情報が利用されることは一切ない。

このように分散分析というのは、1組の間隔尺度以上の測定値と、名義尺度である単独または複数の要因との「関係」を検討する手法だといえる。実際に実験を計画する際、実験仮説あるいは結果の予想から導かれる要因が1つしかない場合は当然ながら1要因計画となるが、要因が2つ以上であるときには、それらを

一括して扱う単独の多要因計画を立てるか、あるいは要因をいくつかに分けて複数の1要因計画またはより低次の多要因計画で実施するのが問題となる。この点について仮想的な例をあげて詳しく検討してみたい。たとえば、中学生の数学の学力について検討するため、測定値（従属変数）としては標準学力テストの素点を用い、要因（独立変数）として男・女という性別要因とP市・Q村という地域要因の2つを考えたとする。これを単独の実験計画で行うならば、2水準×2水準の2要因計画（両要因とも被験者間配置）とし、分散分析では性別および地域の主効果、さらに性別×地域の交互作用の有意性が検定される。これを2つの実験計画に分割するならば、たとえば実験1では性別要因だけに注目し、P市とQ村からの標本は男女ともほぼ同数になるようにカウンターバランスをとる1要因計画で行い、性別の主効果の有意性のみを分散分析で検定する。つぎの実験2ではまったく逆に性別でカウンターバランスをとった上で、地域要因の主効果をみることになる。このケースでは互いに別の分析からではあるが2つの主効果を扱うことができるものの、2要因の交互作用についての情報はまったく含まれないことになる。さらに、あまり現実的ではないが、実験1では男子だけで地域差（P市とQ村間）、実験2では女子だけで地域差、実験3ではP市だけで性差（男子と女子間）、実験4ではQ村だけで性差をみるという方法も考えられなくはない。この4実験のケースでは、2実験への分割とは異なり交互作用に関する間接的な情報は得られるが、2要因計画のような交互作用の統計的検定を行うことはできない。なお、ここで述べた実験の順序（1と2、または1から4）は説明上の一例であって特に意味はない。

2要因とも2水準（2×2）という簡単な場合においても理論的には3通りの実験計画が考えられることを例示したが、要因数がさらに増えていくと立案可能な実験計画の数は急激に多くなる。たとえば3要因とも2水準（2×2×2）の場合、3要因計画のほかに

1 要因計画だけで行うならば3実験と8実験に分割する2通りの方法があり、さらに2要因の2実験に分割するときにはどの要因で分けるかにより3通りの異なる計画になり得る。したがって、2要因以上を扱いたい実験を計画する際においては、それぞれの実験計画の違いにどのような長所と欠点があるかについてよく理解しておく必要がある。そこで本論文では(1)交互作用の検出と(2)実験の効率化という2つの観点から、実験計画の選択に関する考察を行っていくものとする。

交互作用について

2 要因交互作用 まず最初に、もっとも簡単な2つの要因の組み合わせによる交互作用について考えてみるが、これは1次交互作用(primary interaction)ともよばれているものである。ここでは2つの要因をAとBで表し、ともに2水準の被験者間配置であり、各処理に割り当てる被験者数は同数nとしておく。このような単純化によっても、交互作用の本質に関する議論で何ら制約を受けることはない。

2 要因計画の変動因としては、はじめに2つの主効果に触れておく必要がある。すなわち、全体の平均から要因Aの各水準の平均への偏差平方和、おなじく全体の平均から要因Bの各水準の平均への偏差平方和の2つである。したがって、要因Aの主効果というのは、要因Bの各水準の違いを区別せずに、ひとまとめにしたときの効果だといえる(逆に要因Bからみても同じことがいえる)。これに対して交互作用というのは、各水準の平均ではなく、2要因の各水準が交差している部分である細胞(cell; 処理: treatmentともいう)の平均に注目する。しかしながら、全体の平均から細胞ijへの偏差そのものではなく、そこからさらに全体の平均から要因Aの水準iの平均への偏差、および同様に全体の平均から要因Bの水準jへの偏差を差し引いたものの平方和である。これを数式で表せば、

$$\begin{aligned} & \left[(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{...}) - (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{...}) - (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{...}) \right]^2 \\ & = (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{...})^2 \end{aligned}$$

となる。残る変動因である誤差(error; または残差 residual)は、細胞の平均から各測定値への偏差平方和となる。これらをまとめてTable 1に示す。

この数式に従って交互作用について説明すると『細胞ごとの変動から、主効果で説明されてしまう分を減じた残りの変動』あるいは逆に『細胞ごとの変動において、2つの主効果の「加算」だけでは説明できない変動』ということができる。極めて比喩的な表現をするならば、交互作用とは『2つの主効果の単純な「混合」ではなく、両者が何らかの相互反応を起こして新たな性質が生まれる「化合」である』といえる。しかしながら、この説明だけでは実際の実験結果を解釈するのは容易ではない。そこで最初にあげた数学の学力に対する性別要因と地域要因の仮想例を利用して検討してみたい。交互作用の意味がもっとも明確であると考えられるケースとして、2 要因交互作用だけが有意であり、残りの2つの主効果はともに有意でない場合の仮想的な数値例をTable 2に示すとともに、それをグラフ化したのがFig. 1である。

まず主効果についてみてみると、男子と女子の平均はともに50点、P市とQ村も同様に50点であるから、性別要因および地域要因の主効果はいずれも有意でない(これは説明のための仮想例であるから、実際の検定は行っていない。以下の交互作用でも同様)。この結果だけでは、性別も地域も数学の学力とはまったく「関係」がないように思われる。確かに性差については地域差を「込み」にした場合には、また地域差については性差を「込み」にした場合には、主効果はまったく認められない。ここでいう「込み」とは、「ひとまとめにする」とか「区別はしない」という意味である。しかしながらFig. 1に注目すれば、男子においてはQ村

Table 1 2 要因計画の平方和と自由度

| 変動因 | 平方和 | 自由度 |
|-------|--|------------------|
| 主効果 A | $nb \sum_i (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{...})^2$ | $a - 1$ |
| 主効果 B | $na \sum_j (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{...})^2$ | $b - 1$ |
| 交互作用 | $n \sum_i \sum_j (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{...})^2$ | $(a - 1)(b - 1)$ |
| 誤差 | $\sum_i \sum_j \sum_k (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2$ | $ab(n - 1)$ |
| 全体 | $\sum_i \sum_j \sum_k (x_{ijk} - \bar{x}_{...})^2$ | $abn - 1$ |

Table 2 2 要因計画の平均値

| | 地域要因 | | | |
|------|------|-----|----|----|
| | P 市 | Q 市 | 全体 | |
| 性別要因 | 男子 | 60 | 40 | 50 |
| | 女子 | 40 | 60 | 50 |
| | 全体 | 50 | 50 | 50 |

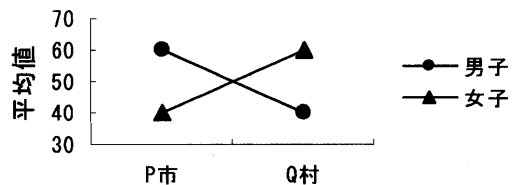


Fig. 1 平均値のグラフ

よりもP市で成績がよく、逆に女子においてはP市よりもQ村で成績がよいという反対の関係になっている。これは地域差の現れ方が男子と女子で異なるということであり、性差の現れ方がP市とQ村では異なると言い換えることもできる。すなわち性別要因も地域要因も数学の学力とは決して無関連ではないのであるが、それが通常の主効果とは違った形で「関係」していることになる。これがまさに2要因交互作用の本質であり、一方の要因についての主効果の現れ方が、もう一方の要因での水準によって異なると解釈できる。このように残りの要因の水準ごとに考える主効果のことを、残りの要因の各水準を「込み」にする通常の主効果(main effect)と区別して、単純主効果(simple main effect)とよんでいる。この単純主効果の検定は、交互作用が有意であった場合に限り下位検定として行われる。ここでの仮想例によれば、地域要因の単純主効果は男子水準および女子水準ともに有意であり(性別要因の単純主効果はP市水準およびQ村水準とも有意であり)、その大小関係が逆転しているタイプの2要因交互作用であった。一般的にはもっと様々なタイプの交互作用が考えられるが、Fig. 1と同様のグラフ化をしたとき、2本の連結線が明らかに平行していないとき交互作用が存在すると予想してよい。

この2要因交互作用というのは、1要因計画で2つの実験を行っても統計的に検出できるものではなく、そのためにはどうしても2要因計画が必要となる。もう少し強調していえば、のちに述べる実験の効率化のため以外で2要因計画を用いるのは、交互作用の検出が実験の主たる目的であるときに他ならないのである。人間の心理や行動というのは、ある単一の要因によって規定されているということは極めて希であり、多くの要因が複雑に絡み合っていると考えられる。したがって、心理学研究を進めていく上では、主効果よりも交互作用に注目する必要があると、ここでは強調しておきたい。

3 要因交互作用 3つの独立変数をもつ3要因計画における変動因は、要因AとBとCの3つの主効果、 $A \times B$ と $A \times C$ と $B \times C$ の3つの2要因(1次)交互作用、 $A \times B \times C$ の3要因(2次secondary)交互作用、および誤差である。これらのなかで3要因交互作用以外は2要因計画とほぼ同様に考えて問題はない。一方、3要因交互作用というのは、細胞 ijk による変動成分から、3つの主効果によって説明される変動、さらに3つの2要因交互作用によって説明される変動を差し引いても残る部分のことであり、これらの説明を整理した結果だけを2次交互作用の平方和として数式で示せば次の通りとなる。

$$SS_{A \times B \times C} = n \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^c (\bar{x}_{ijk} - \bar{x}_{j..} - \bar{x}_{i.k} - \bar{x}_{.jk} + \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{.k.} - \bar{x}_{...})^2$$

この3要因交互作用を言葉で説明すれば、2要因交互作用の現れ方が、残るもう1つの要因の水準によって異なるということになる。このことの概念的な意味を一般論として把握したり、さらには実際の実験計画に結びつけて具体的に解釈することは、問題のモデル化がよほど十分に行われていない限り決して容易ではない。しかしながら、2要因計画を何度繰り返しても3要因交互作用が検出できないため、それが研究の目的に含まれるのであれば、3要因計画を使わねばならないのは当然である。

実験の効率化について

2 要因計画 交互作用の検出が目的ではない場合に多要因計画を採用する利点としては、実験の効率化という側面について論じねばならない。そこで先ほどと同じ2要因計画の仮想例を用いて考えてみたい。まず、これを2つの1要因計画で行うとすれば、性別要因については男子20名と女子20名、また地域要因についてもP市20名とQ村20名で実施するならば全体で80名の被験者が必要となる。一般的に1つの実験の精度の目安となるのは、要因効果のF検定を行う際の分母となる誤差項の自由度であり、これが大きいほど実験の精度は高いと考えられる。ここでの2つの実験の誤差項の自由度はともに38であり、この精度を得るためには80名の被験者が必要であった。一方、2要因計画で誤差項の自由度が38を超えるようにするためには、すなわち2つの1要因計画と同じぐらいの精度を2要因計画で得るためには、P市男子、P市女子、Q村男子、Q村女子それぞれ11名の合計44名だけでよく、このときの誤差項の自由度は40となる。すなわち、2要因計画ならば被験者数は半数強で済みながら、かつ、わずかながら精度が向上するのである。

一般論として被験者数を増やして実験の精度を上げるとするのは誤りではないが、精度が同じであるならば、被験者数(収集するデータ数)が少ないほど実験の時間的、労力的、あるいは経済的な効率性はよい。さらには、実験が大規模化すると様々な測定誤差が混入する可能性が増大するが、そうした危険に対しても小規模実験ならば相対的に頑強である。

このような実験の効率化が一般にどの程度なのかについて、さらに検討を加えてみたい。1要因2水準(細胞内の被験者は同数)の実験計画で理論的な最小規模は、水準内に2名ずつの計4名であり、これを2回繰り返すと被験者数は合計8名で、誤差項の自由度はともに2ということになる。一方、2要因計画での最小規模は各細胞ごとに2名ずつで合計8名と変わらないが、そこでの誤差項の自由度は4であり精度面では向上しているといえる。ただし、これでは小規模過ぎて現実的ではないので、1要因2水準計画での水準内の

Table 3 被験者数と自由度の比較

| 水準数 | 1 要因 / 2 回 | | 2 要因 / 1 回 | |
|-------|------------|-----|------------|-----|
| | 被験者数 | 自由度 | 被験者数 | 自由度 |
| 2 × 2 | 40 | 18 | 24 | 20 |
| 3 × 3 | 60 | 27 | 36 | 27 |
| 4 × 4 | 80 | 36 | 64 | 48 |
| 5 × 5 | 100 | 45 | 75 | 50 |
| 6 × 6 | 120 | 54 | 108 | 72 |

被験者数の実用的な下限を仮に 5 名とすれば、1 要因計画を 2 回行うときの被験者数は 20 名、誤差項の自由度はともに 8 である。これを同程度の精度をもつ 2 要因計画で行えば合計 12 名で自由度は 8 となる。したがって、2 水準 × 2 水準の 2 要因計画の実用的な範囲内においては、1 要因計画の繰り返しと同じ精度を得るために必要な被験者数は、おおよそ半数であると考えてよいであろう。

続いて 2 要因計画ではあるが水準数が多くなるとどうなるかについても考えてみる。1 要因で行うときの 1 水準あたりの被験者数を 10 名と固定しておき、そのときよりも誤差項の自由度が大きくなるような 2 要因計画に必要な被験者数および自由度を Table 3 に示す。細胞内の被験者数は等しいという条件や、誤差項の自由度は等しいか大きくするという設定であるため、2 要因計画にしても半数近くまで減らせないときもあるが、何らかの効率化が認められることは明らかである。一方、ここでの効率化の議論は主効果を検出する際の精度を中心に検討してきたが、交互作用の検出が主たる目的である場合には、細胞あたりの被験者数については、もう少し別の観点も必要となってくる。このことは多要因計画になるほど現実的な問題を引き起こすことになるので、次の 3 要因計画において詳しく検討してみたい。

3 要因計画 2 要因のときと同様に考えてみると、1 要因 2 水準計画を 3 度繰り返すとき全被験者数を 60 名とすれば誤差項の自由度がともに 18 となるのに対して、2 水準 × 2 水準 × 2 水準の 3 要因計画では全被験者数が 32 名で誤差項の自由度は 24 となる。1 要因計画では 1 つのデータはその要因の比較のためだけにしか使えないが、2 要因以上の実験計画であれば 1 つのデータはすべての要因の比較に利用できるのである。別の見方をするならば、同じ数だけ被験者を集めたとしても、それを 1 つの実験に割り当てるか、分割して複数の実験に割り当てるかの違いである。したがって、1 要因計画の繰り返しと比較する限り、要因の数が多くなれば一般に実験効率も向上することになる。

しかしながら、ここでの 3 要因計画においても、各要因の水準数が多くなると、それらの組み合わせである細胞数も急激に増加していく。そこで 3 要因とも水準数が同じ場合に限って細胞数を示したのが Table 4

Table 4 水準数と細胞数

| 水準数 | 細胞数 |
|-----------|-----|
| 2 × 2 × 2 | 8 |
| 3 × 3 × 3 | 27 |
| 4 × 4 × 4 | 64 |
| 5 × 5 × 5 | 125 |
| 6 × 6 × 6 | 216 |

である。最高次の交互作用の検出が必要ない場合には細胞あたりの被験者数は 1 名でよいが（細胞数と被験者数は同じ）、すべての細胞で 2 名以上ということであれば実験の規模は非常に大きくなってしまふ。実験規模が拡大することは効率化の妨げになる以外にも、すでに述べたように測定誤差に対する頑強性に問題を与えかねない。高次の交互作用を検出することが研究の目的であれば回避できない制約であるが、そうではなくて 1 要因計画の繰り返しの非効率さを改善するために、複数の要因をまとめて 1 つの実験を立案しているならば、次節で述べるような別の方法も考案されている。

一部実施法について

ここまで議論してきたのは、すべての細胞についてデータを収集するという計画であり、最高次の交互作用が検出できるかどうか細胞の大きさに依存していること以外は、すべての要因効果を取り扱うことができた。しかしながら、要因数が多くなる場合、さらにはそこでの水準数が多くなっていくと、実験が大規模化するという問題点もあった。そこですべての要因効果の抽出が必要ないときには、データの一部を意図的かつ計画的に収集しない一部実施法 (fractional factorial design; 部分要因計画ともいう) とよばれている方法も開発されてきた。ここでは具体的な手法としてラテン方格配置、グレコ・ラテン方格配置、直交表の 3 つについて検討してみたい。

ラテン方格配置 行数と列数がともに p である昇目に対して、 p 種類の記号を p 個ずつ配置するとき、どの行にもどの列にも同じ記号が 2 つ以上含まれていないならば、これをラテン方格 (Latin square) という。その例を第 1 行と第 1 列がともに記号順になっている標準方格で Table 5 に示す。このラテン方格配置の起源もやはり農場試験であり、農作地を縦と横の両方向についてブロック化したものである。ちなみに、縦か横かどちらか一方だけでブロック化したのが乱塊配置、またブロック化して管理しないのが完全無作為配置である。

このラテン方格配置は 3 要因計画であるが、3 要因とも同じ水準数 p でなければならないという制約がある。また 3 要因とも実験要因とするときは、すべて異

Table 5 ラテン方格の例(標準方格)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p=2$ | $p=3$ | $p=4$ | $p=5$ | $p=6$ | $p=7$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"><tr><td>I</td><td>J</td></tr><tr><td>J</td><td>I</td></tr></table> | I | J | J | I | <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"><tr><td>I</td><td>J</td><td>K</td></tr><tr><td>J</td><td>K</td><td>I</td></tr><tr><td>K</td><td>I</td><td>J</td></tr></table> | I | J | K | J | K | I | K | I | J | <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"><tr><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td></tr><tr><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>I</td></tr><tr><td>K</td><td>L</td><td>I</td><td>J</td></tr><tr><td>L</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td></tr></table> | I | J | K | L | J | K | L | I | K | L | I | J | L | I | J | K | <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"><tr><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td></tr><tr><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td><td>I</td></tr><tr><td>K</td><td>L</td><td>M</td><td>I</td><td>J</td></tr><tr><td>L</td><td>M</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td></tr><tr><td>M</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td></tr></table> | I | J | K | L | M | J | K | L | M | I | K | L | M | I | J | L | M | I | J | K | M | I | J | K | L | <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"><tr><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td><td>N</td></tr><tr><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td><td>N</td><td>I</td></tr><tr><td>K</td><td>L</td><td>M</td><td>N</td><td>I</td><td>J</td></tr><tr><td>L</td><td>M</td><td>N</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td></tr><tr><td>M</td><td>N</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td></tr><tr><td>N</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td></tr></table> | I | J | K | L | M | N | J | K | L | M | N | I | K | L | M | N | I | J | L | M | N | I | J | K | M | N | I | J | K | L | N | I | J | K | L | M | <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"><tr><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td><td>N</td><td>O</td></tr><tr><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td><td>N</td><td>O</td><td>I</td></tr><tr><td>K</td><td>L</td><td>M</td><td>N</td><td>O</td><td>I</td><td>J</td></tr><tr><td>L</td><td>M</td><td>N</td><td>O</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td></tr><tr><td>M</td><td>N</td><td>O</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td></tr><tr><td>N</td><td>O</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td></tr><tr><td>O</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td><td>N</td></tr></table> | I | J | K | L | M | N | O | J | K | L | M | N | O | I | K | L | M | N | O | I | J | L | M | N | O | I | J | K | M | N | O | I | J | K | L | N | O | I | J | K | L | M | O | I | J | K | L | M | N |
| I | J | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| J | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I | J | K | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| J | K | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| K | I | J | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I | J | K | L | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| J | K | L | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| K | L | I | J | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| L | I | J | K | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I | J | K | L | M | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| J | K | L | M | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| K | L | M | I | J | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| L | M | I | J | K | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| M | I | J | K | L | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I | J | K | L | M | N | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| J | K | L | M | N | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| K | L | M | N | I | J | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| L | M | N | I | J | K | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| M | N | I | J | K | L | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| N | I | J | K | L | M | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I | J | K | L | M | N | O | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| J | K | L | M | N | O | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| K | L | M | N | O | I | J | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| L | M | N | O | I | J | K | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| M | N | O | I | J | K | L | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| N | O | I | J | K | L | M | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| O | I | J | K | L | M | N | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

注： $p=2$ はラテン方格配置に使えない。

なる $p \times p$ 名の被験者とするか、1名の被験者から全データを集めることになる。一方、実験要因を2要因とし、3番目の要因に被験者を割り当てる方法も行われており、このときの被験者数は p 名となる。さて、具体的な配置方法についてであるが、3つの要因の各水準は各行と各列と各記号に割り付けられる。 $p=3$ を例にとれば、これは3水準(A_1, A_2, A_3) \times 3水準(B_1, B_2, B_3) \times 3水準(C_1, C_2, C_3)であるからTable 6のように配置することになる。すなわち行列の行に要因A、列に要因B、記号に要因Cを割り当てているが、これを通常の3要因計画のように表現したのがTable 7であり、○印はデータが存在することを、また空白は該当するデータが収集されていないことを、それぞれ示している。この表の要因Cを紙面の上下方向に重ねた立方体を考えてみると、1つの升目をどの方向(前・横・上)から「串刺し」したとしても、つねに1つのデータしか存在しないという構造になっている。したがって、すべてが3水準である3要因計画を通常の方法で行えば細胞の数は27あるのに対して、ラテン方格配置ではそのなかの9つの細胞でしかデータを集めていないことになる。これを一般化すると、水準数を p とするラテン方格配置では、全体の細胞数 p^3 の $1/p$ 、すなわちデータ数は P^2 だけでよく、 p が大きくなるほど効率化の程度は顕著になる。

さらに詳しく検討してみると、たとえば要因Aの主効果をみると、その各水準には要因BおよびCの各水準が同数含まれているので、これらの主効果による水準差(すなわち1次交互作用)は適切に相殺されているといえる。ところが、要因BとCの組み合わせでみると、要因Aの各水準にはまったく異なる組み合わせしか含まれていない(Table 7参照)。このことは2次交互作用が主効果と交絡(confound)していることに他ならない。そこでラテン方格配置では、全体の変動

を3つの主効果と残差に分け、さらに交互作用はすべて有意でないという仮定をおくことにより、残差を正規分布に従う無作為な誤差とみなして検定を行っている。逆にいえば、すべての交互作用はないことを前提として、データの一部のみを収集することで3要因の主効果だけを効率的に取り扱う計画なのである。

グレコ・ラテン方格配置 大きさが同じラテン方格があり、その一方の記号をラテン文字、もう一方をギリシャ文字とし、この2つの方格を重ね合わせたとき、 $I\alpha, I\beta, I\gamma$...という文字の組み合わせが1回ずつしか現れなければ2つのラテン方格は互いに直交するといひ、このように重ね合わされたものをグレコ・ラテン方格(Graeco-Latin square)とよぶ(Table 8)。この方格を用いて行と列とラテン文字とギリシャ文字に4つの要因を割り当てるのがグレコ・ラテン方格配置であり、各要因の水準数 p は4以上ですべて等しくなければならない。通常の4要因計画であれば細胞数は p^4 になるが、そのうち $2p^2$ しかデータを集めなくてよい。ここでの $p=4$ の例であれば全細胞数256に対してデータ数32となり、 p が大きくなるほど両者の差は拡大していく。ラテン方格配置と同様にグレコ・ラテン方格配置では4つの要因の主効果のみが扱われ、残りの交互作用は有意でないと仮定されている。

直交表による実験計画 ラテン方格配置やグレコラテン方格配置を用いれば、実験の規模が大幅に小さくなるという効率化があるが、要因数や水準数に関する制約や、すべての交互作用は有意でないという仮定など、実際に実験を計画する上で不都合な制約も少なくない。そこでもう少し柔軟に計画が立てられるようにと考えられたのが、直交表(table of orthogonal arrays; 直交配列表ともいう)を用いる一部実施法である。この直交表には様々な種類と規模のものがあるが、

Table 6 ラテン方格配置

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| | B_1 | B_2 | B_3 |
| A_1 | C_1 | C_2 | C_3 |
| A_2 | C_2 | C_3 | C_1 |
| A_3 | C_3 | C_1 | C_2 |

Table 7 ラテン方格配置の通常表現

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | C_1 | | | | C_1 | | | | C_1 | | |
| | B_1 | B_2 | B_3 | | B_1 | B_2 | B_3 | | B_1 | B_2 | B_3 |
| A_1 | ○ | | | A_1 | | ○ | | A_1 | | | ○ |
| A_2 | | | ○ | A_2 | ○ | | | A_2 | | ○ | |
| A_3 | | ○ | | A_3 | | | ○ | A_3 | ○ | | |

Table 8 グレコ・ラテン方格の例($p=4$)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|----------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|----------|---------|----------|---------|----------|----------|----------|---|--|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td></tr> <tr><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>I</td></tr> <tr><td>K</td><td>L</td><td>I</td><td>J</td></tr> <tr><td>L</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td></tr> </table> | I | J | K | L | J | K | L | I | K | L | I | J | L | I | J | K | + | <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>α</td><td>β</td><td>γ</td><td>δ</td></tr> <tr><td>γ</td><td>δ</td><td>α</td><td>β</td></tr> <tr><td>δ</td><td>γ</td><td>β</td><td>α</td></tr> <tr><td>β</td><td>α</td><td>δ</td><td>γ</td></tr> </table> | α | β | γ | δ | γ | δ | α | β | δ | γ | β | α | β | α | δ | γ | → | <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>$I\alpha$</td><td>$J\beta$</td><td>$K\gamma$</td><td>$L\delta$</td></tr> <tr><td>$J\gamma$</td><td>$K\delta$</td><td>$L\alpha$</td><td>$I\beta$</td></tr> <tr><td>$K\delta$</td><td>$L\gamma$</td><td>$I\beta$</td><td>$J\alpha$</td></tr> <tr><td>$L\beta$</td><td>$I\alpha$</td><td>$J\delta$</td><td>$K\gamma$</td></tr> </table> | $I\alpha$ | $J\beta$ | $K\gamma$ | $L\delta$ | $J\gamma$ | $K\delta$ | $L\alpha$ | $I\beta$ | $K\delta$ | $L\gamma$ | $I\beta$ | $J\alpha$ | $L\beta$ | $I\alpha$ | $J\delta$ | $K\gamma$ |
| I | J | K | L | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| J | K | L | I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| K | L | I | J | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| L | I | J | K | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| α | β | γ | δ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| γ | δ | α | β | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| δ | γ | β | α | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| β | α | δ | γ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $I\alpha$ | $J\beta$ | $K\gamma$ | $L\delta$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $J\gamma$ | $K\delta$ | $L\alpha$ | $I\beta$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $K\delta$ | $L\gamma$ | $I\beta$ | $J\alpha$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $L\beta$ | $I\alpha$ | $J\delta$ | $K\gamma$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ラテン方格(I) | | ラテン方格(II) | | グレコ・ラテン方格 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

ここでは $L_8(2^7)$ と記号化されているものをTable 9に示す。 L は直交表の起源であるラテン方格の頭文字であり、下付きの8は行数(データ数)、2は2水準計画、上付きの7は列数(要因効果数)を表している。これが直交表とよばれているのは、7つの列からどの2列を組み合わせても、それぞれを中心化したときの内積が0、すなわち2つの列ベクトルは互いに直交しているためである(これは2つの列間の相関はすべて0であるともいえる)。もう少し詳しくみると、各列とも水準を表す1と2が同数含まれており(ここでは4)、主効果を比較するための周辺度数は等しくなっている。さらに、どの2列を組み合わせても各行ごとの(1, 1)、(1, 2)、(2, 1)、(2, 2)のペアはすべて同数になっている(ここでは2)。このことは片方の列が1または2であるとき、もう一方の列の1と2が同じ数になっているということであり(ここでは4)、列に配置した1つの要因の主効果をみるとき、残りのすべての要因の各水準が平等に割り当てられていることになるため、主効果に対して1次交互作用が交絡していない。そもそも、この表はすべてが2水準である3要因計画を表現したものであり(細胞の大きさは1)、その場合はすべてのデータが収集されているため1次および2次の交互作用が抽出可能な配置となっている。しかしながら、この直交表を利用することで、交互作用の一部または全部が有意でないと仮定する4要因計画を一部実施法で扱うことができる。た

例えば、交互作用はすべて有意でないと仮定して、列番1, 2, 3, 5に要因A, B, C, Dを割り付けたとすれば、行番の上から順に $A_1B_1C_1D_1$, $A_1B_1C_1D_2$, $A_1B_2C_2D_1$, $A_1B_2C_2D_2$, $A_2B_1C_2D_2$, $A_2B_1C_2D_1$, $A_2B_2C_1D_2$, $A_2B_2C_1D_1$ という8つのデータをランダム順で収集するだけで、4つの要因の主効果が検定できる。さらに割り付け方法を工夫すれば、4要因で2つの1次交互作用までが許容される計画や、1つの要因が3または4水準といった計画なども立てることができる。このように2水準の直交表を使えば、全体の半数だけのデータを集めるという一部実施法により所要の分析が行えるのである。

まとめ

2つ以上の要因を含む実験の実施計画を立てるにあたっては、まず最初に、どの次数までの交互作用の検討が研究目的に含まれるかを明確にせねばならない。その際、あまり高次の交互作用までを対象にしてしまうと、それが実際に有意であったときは解釈に苦しむことが多いし、有意でなければ実験規模を無駄に大きくしてしまったことになる。そして本当に必要な交互作用の次数が定まったならば、それが確実に検出されるような実験計画を立てねばならない。すでに述べたように、1要因実験をいくら繰り返しても1次交互作用の有意性の検定は行えないのである。

もう一つの考え方は、どの次数以上の交互作用は有意でないと先験的に仮定できるか、すなわち無視しても問題ないかという点である。2次以上の交互作用というのは、主効果とすべての低次の交互作用では説明されない残りの変動であるから、高次になるほど急激に小さくなるのが普通である。しかし一方では、人間の心理や行動を研究対象とした場合、主効果や低次交互作用の「加算」だけでは済まされない複雑な「関係」の存在も予想される。無視できるはずの交互作用が実際には存在したならば、結果の解釈で誤りを犯す危険も決して小さくはない。

結論としては、必要な交互作用の次数と、無視してよい交互作用の次数を適切に見極め、前者についてはそれが正確に検出でき、同時に後者に関しては一部実施法などで効率化を図ることが多要因計画では重要だということである。

Table 9 $L_8(2^7)$ 直交表

| 行番 No. | 列 番 | | | | | | |
|-----------|-----|----|---|-----|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 5 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 6 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 7 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 8 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 成分 | a | a | | a | | a | |
| | | b | b | | | b | b |
| | | | | c | c | c | c |
| | I | II | | III | | | |

参考文献

- 生沢雅夫 1977 実験計画 (社会科学・行動科学のための数学入門7) 東京:新曜社
岩原信九郎 1965 新訂版 教育と心理のための推計学 東京:日本文化科学社
小牧純爾 2000 心理学実験の理論と計画 京都:ナカニシヤ出版
廣津千尋 1976 分散分析 (新しい応用の数学13) 東京:教育

出版

- 奥野忠一・芳賀敏郎 1969 実験計画法 (新統計学シリーズ2) 東京:培風館
大村 平 1984 実験計画と分散分析のはなし 東京:日科技連出版社
芝 祐順・渡部 洋・石塚智一編 1984 統計用語辞典 東京:新曜社
鷺尾泰俊 1974 実験計画法入門 東京:日本規格協会