中学校数学の図形領域における初等幾何の指導内容と前提条件

Axioms and Theorems of Elementary Geometry in Junior High School

片山 聡一郎　　田川 裕之
Soichiro KATAYAMA　　Hiroyuki TAGAWA
（和歌山大学教育学部）　（和歌山大学教育学部）

2011 年 8 月 22 日受理

中学校数学の図形領域は, 数学的な内容としては, いわゆる初等幾何を学ぶ部分であるが, 同時に論証指導が開始される部分でもある. そこでの論証は, 直観的・実験的に成立を認めたいくつかの事柄に立脚して行われる. この中には, 教育的配慮から論証をせずに認めるものと, 本質的に論証抜きに認めざるを得ないものが混在している. 本稿では中学校数学の指導内容を概観し, 論証抜きに認める基本的命題として何が採用され, どのような命題が証明されているのかを調べる.

1　序

中学校数学の図形領域で扱われる内容は, ユークリッド幾何学として知られるものである. また, このユークリッド幾何を題材として論証指導が中学 2 年生より開始される.

ユークリッド幾何学は, 紀元前 300 年ごろに古代ギリシャの数学者ユークリッドが当時の数学を集大成して記した『原論』における幾何の体系である. ユークリッド幾何学では, 座標の概念は用いられていない. また, 線分の和, 角の和, 面積の和や, 直角, 2 直角の概念は現れるが, 線分の長さや図形の面積を数で表すことはなく, 90° や 48° 等のように角度 (角の大きさ) を度数法を用いて表すこともしない. いくつかの (成立が自明と考えられるような) 基本的事柄を “公理” として最初に提示してそれらの成立は認め, これらの公理に基づき演繹的に様々な事柄 (定理) を系統立てて導いていくという形式で『原論』は書かれている. この形式は, 今日に至るまで数学の議論の一つのスタイルとして踏襲されているものであり, 数学の発展に大きな影響を与えた.

中学校数学においても図形領域では座標を用いない幾何が展開される. 角度は小学校算数の “量と測定” 領域で指導されているため (第 4 学年), 中学校数学の図形領域においても, 角度は用いられているが議論の本質的な部分で角の大きさが数で表されることを用いることはない (例えば “三角形の内角の和は 180° である” という定理はあるが, 180° は 2 直角であるから, 上述のユークリッド幾何で扱う範囲を逸脱しない).

17 世紀のデカルトに端を発して, 平面 (あるいは空間) に (直交) 座標を導入し, 直線や円などを数式で表して, 幾何の対象を代数的 (あるいは解析的) に扱うという解析幾何学が成立した. 解析幾何学はデカルト幾何学とも呼ばれる. 中学校数学においては, 関数領域において一次関数や二次関数のグラフを書くために座標平面が用いられ, 座標を用いたデカルト幾何学への下地を作るが, デカルト幾何学 (および幾何ベクトルの初等幾何への応用) が扱われるのは高校に入ってからである.

2　中学校数学の図形領域の内容

ここで中学校数学の図形領域の内容を概観する. 以下, 基本的には平成 10 年公示 (平成 15 年一部改訂) の学習指導要領 [1] とそれに基づく教科書 ([5], [6], [7]) に従って内容を述べるが, 平成 20 年公示の新学習指導要領 [3] における変更についても簡単に述べる (教科書の選択は無作為であり特別な意図はない). 紙面の都合もあり, 平面幾何, 特に三角形の合同・相似や三角形の性質に関する部分を詳しく見る. 出版社により教科書で内容が提示される順序は若干前後するので, 内容の提示順序は適宜組み替えている. また表現も, 各教科書や (新) 学習指導要領 (解説) とは必ずしも逐語的には対応していない点に留意していただきたい.

2.1　第 1 学年における内容

第 1 学年の図形領域を習う段階では, 生徒はまだ “定義”, “定理”, “証明” という概念は明確には学んでいない. したがって, 教科書ではこの段階では “〜を〜と定義する”

などの表現は現れないが, ここでは “定義” という言葉を使わせてもらう.

まず小学校での既習内容と関連した部分に触れておこう. “直線” は小学校 2 年で学ぶ言葉であるが, 多くの中学校数学の教科書で “線分”, “2 点間の距離” などと合わせて以下のような定義が提示されている:

- 点 A, B を通り, 限りなく伸びているまっすぐな線を直線 AB という.
- 直線 AB の一部で A, B までの間と両端を含めたものを線分 AB という.
- 線分 AB の長さを, 点 A, B 間の距離という.

さらに “与えられた 2 点を通る直線はただ一つに限る” ことに触れている教科書もある. “直角”, “頂点”, “辺” (小学校 2 年), “角” (小学校 3 年), “垂直”, “平行”(小学校 5 年, 新学習指導要領では 4 年) なども小学校の既習事項である. 教科書によっては, これらのうちのいくつかの定義をもう一度振り返っている. 例えば “角” とは “1 つの頂点から出る 2 つの辺が作る形” であることや, “2 つの直線が垂直である” とは 2 直線のなす角が $90°$ であることなどが述べられている. また, 角を表す記号 $\angle$ や, 垂直を表す記号 $\perp$ が導入される. なお, (中学校数学において) $\angle$AOB と書いたときには, 文脈に応じて “辺 OA と辺 OB が作る形” を表す場合と, その角の “大きさ” を表す場合があるので注意が必要である. “平行” に関しては, “平行” を表す記号 // が導入され, また中学校数学の多くの教科書で

- 2 つの直線がどこまで行っても交わらないとき, その 2 つの直線は平行であるという

という定義が再提示されている. ただし小学校の学習指導要領解説では、上の表現は児童にとって分かりにくい場合もあるとして, 垂直という概念を用いた次の定義も提示されている:

- 1 つの直線に垂直な 2 つの直線があるとき, この 2 つの直線は平行であるという.

したがって, 生徒によっては異なる定義で “平行” を理解している可能性があることに注意が必要である.

他には, 線分 AB と線分 CD の長さが等しいことを AB = CD と書くという記法と, 三角形を表す △ という記号も導入される. なお, 多角形とは “線分だけで囲まれた図形” というのが中学校における定義であり, 3 本の線分で囲まれた図形が三角形ということになる.

さて中学校の第 1 学年では, まず線対称という概念が以下のように導入される:

- 1 つの直線 (対称軸) を折り目としてその両側の図形がきちんと重なる図形を線対称な図形という.
- 線対称な図形を対称の軸で折ったとき, きちんと重なり合う 1 組の点や辺, 角をそれぞれ対応する点, 対応する辺, 対応する角などという.

“きちんと重なる” というのは数学的には曖昧さの残る表現であるが, 直観的理解を優先してこのような表現になっているのであろう. こののち, 実験・観察を通じて次の性質が論証抜きに提示される:

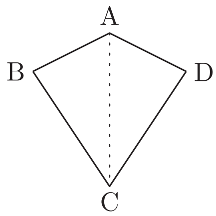
- 線対称な図形では対応する点を結ぶ直線は対称の軸と垂直に交わる. またこの交点と対応する 2 つの点の距離は等しい.

この “性質” の内容が成立することを線対称であることの “定義” とした方が数学的には厳密になる (もちろん, これを定義とするのであれば “対応する点” という概念はまだ定義されていないことになるので, 若干の手直しは必要である). このように, ある言葉を厳密ではなくても直観的理解をしやすい表現で “定義” したのち, より厳密な表現に基づく, むしろその言葉の “定義” とすべきことを “性質” として提示するのは中学校数学, あるいは高校数学を通じて, しばしば見られることである. この後, 線対称と同様にして点対称という概念が定義され, その性質が述べられている. さらに円の性質 (中心と円上の点の距離は一定, 円は線対称かつ点対称など), おうぎ形とその中心角の定義, 直線が円に接することの定義, 円の接線と接点の性質などが述べられているが詳細は省略する. 提示される性質の論証はいずれも行われない. なお, 新学習指導要領では “線対称・点対称” は小学校 6 年に移行する.

次にいくつかの基本的な作図法が指導される. 併せて “合同” という概念も導入される. “合同” は以下のように定義される:

- きちんと重ね合わせることのできる 2 つの図形を合同という.

やはり “きちんと重なる” という直観的だが曖昧な表現が用いられていることに注意しておく. 次に見るように線対称や点対称な図形などを用いて合同の例が提示される. まず “AB = AD かつ CB = CD であるような (あるいは教科書によっては より特殊に AB = AD = CB = CD であるような) 四角形 ABCD は線対称な図形である” ことを直観, あるいは実験に基づく説明により認めている (教科書によっては第 2 学年で三角形の合同を学んだのち, このことを証明しているものもある). 対称軸を



折り目として折るときちんと重なるから, $\triangle$ABC と $\triangle$ADC は合同であると説明される (結局のところ, このことを直観的・実験的理由で認めたと言ってもよい). 合同であるから $\angle$ACB $=$ $\angle$ACD となる (これもこの時点では直観的な説明のみである). その後, これを根拠とする角の二等分線の作図法が紹介される.

また二等辺三角形 (あるいはひし形) が線対称であるという直観的事実を根拠として, 線分 AB の垂直二等分線の作図法が紹介される (なお, 線分 AB を二等分する点を中点といい, 線分 AB の中点を通り, 線分 AB と垂直に交わる直線を線分 AB の垂直二等分線という). さらに, 応用として直線上の一点を通る垂線の作図法も紹介される (与えられた一点が中点となるような線分を与えられた直線上に取った後, 垂直二等分線の作図法を適用すればよい). 直線 ℓ があるとき, 直線 ℓ 上にない点 P を通る直線 ℓ への垂線の作図法も紹介される. 根拠は角の二等分線の場合と同様に上図のような四角形の線対称性である. さらに垂線と関連付けて, 直線 ℓ と (直線 ℓ 上にない) 点 P の距離が以下のように定義される:

- 点 P から ℓ に垂線を引き, その交点を Q としたとき, 線分 PQ の長さを点 P と直線 ℓ の距離という.

また教科書によっては, 図を用いた直観的な説明で

- 点 P と ℓ 上の点を結んでできる線分のうち, 長さがもっとも短いものは点 P から ℓ に引いた垂線である

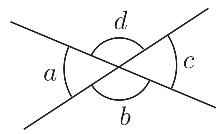
ことが紹介されている. さらに, 直観的・実験的に次の平行線の性質が認められている:

- $\ell \mathbin{/\!/} m$ であるような 2 直線 ℓ, m において, 直線 ℓ 上のどの点をとっても, その点と直線 m の距離は一定である.

この後は空間図形の構成と平面での構成 (展開図, 新学習指導要領ではさらに投影図) や, 図形の計量として, 円周率 π が導入されたり, おうぎ形の弧の長さと面積の求め方, 柱体・錐体の表面積や体積 (さらに新学習指導要領では高校「数学 I」より移動してきた, 球の体積と表面積) の公式などが述べられているが詳細は省略する. また後述するように新学習指導要領では “(平面) 図形の移動” も指導される.

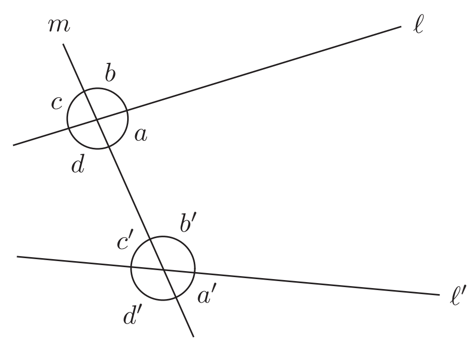
2.2 第 2 学年における内容

第 1 学年で学ぶ性質は基本的にはその根拠は直観, もしくは実験や経験に基づくものであった. この学年から徐々に論理に基づく演繹的な論証が行われるようになる. 直観的に認めることと, 演繹的に証明されることの双方が現れるので, 注意が必要であろう.



まず対頂角 (2 直線が交わってできる 4 つの角のうち向かい合った 2 つの角: 下図で $\angle a$ と $\angle c$, および $\angle b$ と $\angle d$) は等しいことが以下のように証明される: $\angle a = 180^\circ - \angle d = \angle c$.

1 本の直線 m に 2 本の直線 ℓ, ℓ' が交わっているとき, 下図における $\angle a$ と $\angle a'$, $\angle b$ と $\angle b'$, $\angle c$ と $\angle c'$, $\angle d$ と $\angle d'$ のような位置関係にある 2 つの角を同位角という. また $\angle a$ と $\angle c'$, $\angle b$ と $\angle d'$, $\angle c$ と $\angle a'$, $\angle d$ と $\angle b'$ のような位置関係にある 2 つの角を錯角という.



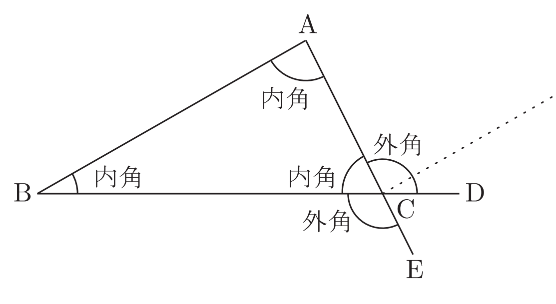
直観に基づき, 平行線と同位角, 錯角の関係が平行線の性質として以下のようにまとめられている:

- $\ell \mathbin{/\!/} \ell'$ であるとき, 同位角が等しい.
- (1 組の) 同位角が等しいとき, $\ell \mathbin{/\!/} \ell'$ である.

対頂角が等しいことを用いれば, 上の 2 つの性質は, 次の性質とそれぞれ同値であることが直ちに分かる:

- $\ell \mathbin{/\!/} \ell'$ であるとき, 錯角が等しい.
- (1 組の) 錯角が等しいとき, $\ell \mathbin{/\!/} \ell'$ である.

$\triangle$ABC において, 図に示した $\angle$BAC, $\angle$ABC, $\angle$ACB を内角, $\angle$DCA や $\angle$BCE などを外角という.



例えば 点 C を通って, 辺 AB に平行な直線を引くと, 平行線と同位角, 錯角の関係から三角形では次が分かる.

- 内角の和は 180° である.
- 外角は隣り合わない 2 つの内角の和に等しい.

この応用として, n 角形の内角の和が $180(n-2)°$ であることや, 各頂点における 1 つずつの外角の和が 360° であることなどが導かれているが詳細は略する.

次に三角形の合同条件が扱われている. 第一学年の内容で書いたように, きちんと重ね合わせることのできる 2 つの図形を合同というのであった. ここで論証抜きに, 合同な図形 (合同な多角形と解釈したほうがよいかもしれない) の性質として

- 合同な図形において, 対応する辺の長さは等しく, また対応する角の大きさは等しい

ことが直観的に認められている. 例によって, この性質をむしろ多角形の合同の定義として採用する方法も考えられ, その方が定義に曖昧さがない.

ここで新学習指導要領に関連した注意をしておこう. 新学習指導要領においては, 小学校 5 年で図形の合同が指導される. [2] から該当部分を少し引用する: 『また二つの合同な図形が, ずらしたり, 回したり, 裏返したりしておかれた場合でも, その位置に関係なく, 必要な辺と辺, 角と角が対応付けられるようにすることが大切である』つまり, 合同であることを確かめるためには “ずらしたり, 回したり, 裏返したり” して 2 つの図形を重ねるということになる. これに対応して, 新学習指導要領では中学 1 年生において平行移動 (“ずらす”), 回転移動 (“回す”), 及び対称移動 (“裏返す”), という “移動” が指導される. この変更に伴い, [4] によれば 『二つの図形は, 次のそれぞれの場合に合同である.

(1) 一方の図形を移動して他方の図形に重ねることができる
(2) 2 つの図形の対応する線分と対応する角が全て等しい』

とされている. このように合同の定義が新学習指導要領においては移動を意識したものとなっている.

さて、三角形の合同に戻ろう. △ABC と △DEF が合同であることを △ABC ≡ △DEF と書き, 対応する頂点をその順に書くという記法の約束がなされる.

次のような 3 種類の三角形の合同条件がこの学年で導入されるが, 根拠は直観もしくは実験に基づくもので, 全て論証抜きに成立を認めている:

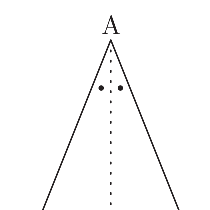
- 3 辺がそれぞれ等しい 2 つの三角形は合同である (三辺相等).
- 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい 2 つの三角形は合同である (二辺挟角相等).
- 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい 2 つの三角形は合同である (一辺両端角相等).

さて、この後, 証明における仮定, 結論などの言葉や, (命題の) 逆などの概念が導入される. 多くの教科書では, ある事柄が正しくても, その逆は必ずしも正しくないことや, ある事柄が正しくないことを示すためには, 正しくない例 (反例) を一つ示せばよいことなども指導される. ここで論証の例として取り上げられる命題は教科書によって様々であるが, 例えば第 1 学年のところで述べた角の二等分線の作図の根拠である “四角形 ABCD において, AB = AD, CB = CD ならば ∠ACB = ∠ACD” であることが以下のように示されている: 点 A と C を線分で結ぶと, 三辺相等の合同条件から △ACB ≡ △ACD である. よって ∠ACB = ∠ACD である.

この後は, ここまでに (直観的に認めた, あるいは証明した) 事柄を用いて, 様々な事が証明される. 例えば二等辺三角形の性質, 直角三角形の合同条件, 円周角の定理, 平行四辺形の性質, 平行四辺形になるための条件, 正方形, 長方形, ひし形の性質などが扱われる. このうちのいくつかをもう少し詳しく見よう. 2 辺が等しい三角形を二等辺三角形という. 二等辺三角形の 2 つの角が等しいこと, より正確には

- 二等辺三角形 ABC において, AB = AC ならば, ∠ABC = ∠ACB となる

ことが以下のように示される:



∠BAC の二等分線を引き, 線分 BC との交点を D とする. D の取り方から ∠BAD = ∠CAD. 仮定より AB = AC. 明らかに AD = AD. よって二辺挟角相等の三角形の合同条件より △ABD ≡ △ACD. 2 つの合同な三角形の対応する角は等しいから, ∠ABC = ∠ABD = ∠ACD = ∠ACB となり結果を得る.

逆に

- 2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形である

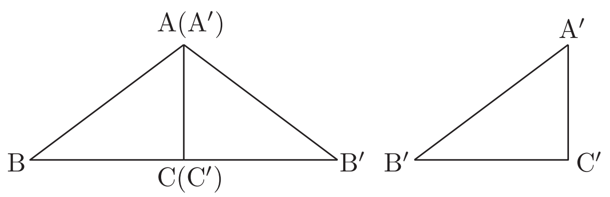
ことも示されている: △ABC において, ∠ABC = ∠ACB であれば, 上図と同様にして点 D を決めれば, 三角形

の内角の和が 180° であることに注意すると, $\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ADC}$ となり, 一辺両端角相等の合同条件から, $\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{ACD}$ が分かる．ここから $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ が結論される．

直角三角形に注意を向けよう．大きさが 90° より小さい角を鋭角という．また 1 つの角が直角である三角形を直角三角形という．直角の向かいにある辺を斜辺という．三角形の内角の和が 180° であることを使うと, 直角三角形の内角は 1 つの直角と 2 つの鋭角からなることが分かる．直角三角形の合同条件として, 次の二つを示すことができる:

- 斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい 2 つの直角三角形は合同である．
- 斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい 2 つの直角三角形は合同である．

実際, 最初の条件が成り立てば, 内角の和が 180° であることを用いれば, 残る鋭角も等しいことが分かり, 斜辺に注目すれば, 一辺両端角相等になるので, 合同であることが分かる．二つ目の条件下での合同の証明は, もう少し複雑である．



$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ において, $\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{A'C'B'} = 90°$, $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ (斜辺), $\mathrm{AC} = \mathrm{A'C'}$ とする．三角形 $\mathrm{A'B'C'}$ を図のように動かして, 点 C と点 C′ が重なるようにする．$\mathrm{AC} = \mathrm{A'C'}$ だから点 A′ と A は一致する[1]．また $\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{A'C'B'} = 90°$ だから点 $\mathrm{B}, \mathrm{C}(\mathrm{C'}), \mathrm{B'}$ は一直線上にある．さらに $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ であるから, $\triangle\mathrm{ABB'}$ は二等辺三角形．よって $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{AB'C} = \angle\mathrm{A'B'C'}$．直角三角形において斜辺と 1 つの鋭角が等しくなるから $\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{A'B'C'}$ である．

いわゆる円周角の定理も示される．ここでは, 証明は基本的に “二等辺三角形の 2 つの角が等しい” ことと “外角は隣り合わない 2 つの内角の和と等しい” ことのみを用いることに触れておくだけにとどめよう．また教科書においては特別な位置関係にある場合のみの証明が与えられていて, 完全に全ての場合が証明されているわけではないことにも注意しておく (なお, 新学習指導要領では第 3 学年に移り, さらに “円周角の定理の逆” が高校から中学の第 3 学年に移される)．

平行四辺形 (すなわち, 2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行である四角形) の性質としては

- 2 組の向かい合う辺は, それぞれ等しい
- 2 組の向かい合う角は, それぞれ等しい
- 対角線はそれぞれの中点で交わる

ことなどが示される．詳細は省くが, 証明に用いられるのは “2 直線が平行ならば錯角が等しい” という性質と, 三角形の一辺両端角相等の合同条件である．また, 四角形 ABCD が

- $\mathrm{AB} = \mathrm{DC}$, $\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$,
- $\mathrm{AB} = \mathrm{DC}$, $\mathrm{AB} \,/\!/\, \mathrm{DC}$,
- $\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BCD}$, $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ADC}$

のいずれかを満たせば, 平行四辺形であることも示される．証明に用いられるのは, 三角形の三辺相等と二辺挟角相等の合同条件, 平行線と錯角の関係 (この場合は “錯角が等しいならば平行” も用いる) と四角形の内角の和が 360° であることである．

2.3　第 3 学年における内容

第 3 学年では幾何における比例や相似などが主として扱われる．もう一つの重要な結果は三平方の定理 (ピタゴラスの定理) である．

まず拡大と縮小という概念が導入されてから, 相似が導入される:

- 図形の拡大 (縮小) とは図形の形を変えないで大きく (小さく) することである．
- 2 つの図形があって, 一方の図形を何倍かに拡大または縮小した図形がもう一方の図形と合同になるとき, この 2 つの図形は相似であるという．

拡大・縮小にはやはり “形を変えない” という直観的ではあるが曖昧な表現が含まれている．しかし “拡大・縮小” と “合同” の概念を厳密に定義すれば, 上の “相似” の定義は同時に厳密なものとなる．2 つの相似な図形においても “対応する頂点, 辺, 角” という言葉がやはり定義される．また, 相似を表す $\backsim$ という記号も導入される． 例えば, $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ が相似であることを $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{A'B'C'}$ のように書く．このとき, 頂点の順は, 対応する頂点の順に書くという約束がなされる．

直観的もしくは実験的な説明の後, 次の性質が紹介される:

[1]次のように思えば “三角形の移動” という概念は避けられる: 直線 BC 上の 点 B の反対側に, 点 B″ を $\mathrm{B''C} = \mathrm{B'C'}$ となるようにとると (つまり上図左の B′ が B″), $\angle\mathrm{ACB''} = \angle\mathrm{A'C'B'} = 90°$ であるから二辺挟角の合同定理より $\triangle\mathrm{A'B'C'} \equiv \triangle\mathrm{AB''C}$.

- 相似な 2 つの図形において, 対応する辺の長さの比は等しい. また対応する角の大きさは等しい.

図形を多角形に限定する限り, この性質を “相似” という概念の定義とした方が数学的には曖昧さがないが, これを定義として採用している教科書は調べた範囲ではなかった.

相似な 2 つの図形で対応する辺の長さの比を相似比という (もちろん、このように定義してよいのは上に述べた性質があるからである). なお, 合同な 2 つの図形は相似比が $1:1$ の相似な図形とみなす.

さらに教科書によっては “相似の中心” と “相似の位置” という言葉も導入されるが, 詳細は省略する.

三角形の相似条件に関しては, 次のような 3 つの条件が提示されている:

- 3 組の辺の比が等しい 2 つの三角形は相似である.
- 2 組の辺の比が等しくその間の角が等しい 2 つの三角形は相似である.
- 2 組の角がそれぞれ等しい 2 つの三角形は相似である.

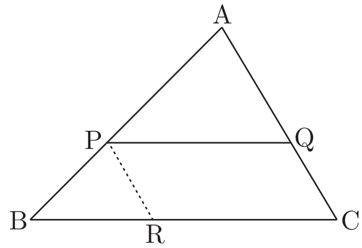
合同条件及び直観に基づく説明がされているが, 証明は行われていない. 例えば, 最初のケースでは $\triangle$ABC と $\triangle$DEF の相対比を $1:k$, $\triangle$ABC の各辺の長さを a, b, c とするとき, 各辺の長さが ka, kb, kc であるような $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ を書くと三辺相等の合同条件から $\triangle \mathrm{A'B'C'} \equiv \triangle \mathrm{DEF}$ となると説明されているが, 肝心の $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ が $\triangle$ABC の拡大 (もしくは縮小) であることの証明がされておらず, これは直観的に認めているだけである. 教科書での定義が曖昧な “拡大・縮小” になっていることを確かめようがないのは当然だが, 例えば $\triangle$ABC と $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ の 3 角がそれぞれ等しいことも示されていない. つまり “形が変わっている” 可能性を論理的に排除できていない.

教科書では相似と地図の縮尺や縮図を絡めた話がこの後に続くが, 詳細は省略する.

次に平行線と線分の比に関するいくつかの定理が証明されている: $\triangle$ABC で, 辺 AB, AC 上に, 点 P, Q がある. このとき

- PQ // BC ならば AP : AB = AQ : AC = PQ : BC.
- PQ // BC ならば AP : PB = AQ : QC.

最初の主張は, 平行線の同位角が等しいことに注意すると, $\triangle \mathrm{APQ} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$ となることから分かる. 二番目の主張は, 点 P を通って, 直線 AC に平行な直線を引き, その直線と辺 BC との交点を R とおけば, 平行線の同位角が等しいことから, $\triangle \mathrm{APQ} \backsim \triangle \mathrm{PBR}$ が分かり結果を得る. これらの応用として, 2 本の直線と交わる, 3 本の平行線と線分の長さの比の関係が証明されているが, 詳細は省略する.



上の性質の逆も示される: $\triangle$ABC で, 辺 AB, AC 上に, 点 P, Q がある. このとき

- AP : AB = AQ : AC ならば PQ // BC.
- AP : PB = AQ : QC ならば PQ // BC.

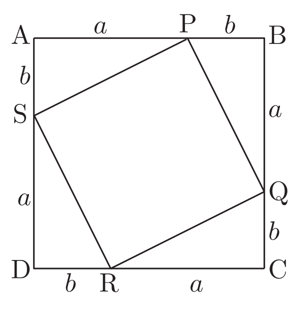
1 番目の結果は, 二辺挟角の相似条件と同位角が等しければ平行であるという性質を用いればよい. 2 番目は, 条件から AP : AB = AQ : AC であることが分かるので, 1 番目の結果を利用すればよい[2].

この結果の帰着として中点連結定理も示される:

- $\triangle$ABC において, 辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とすると, MN // BC, $\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$ であることが示される.

(現学習指導要領の下で) 図形領域において中学校で最後に扱われるのは三平方の定理 (ピタゴラスの定理) とその応用である:

- 直角三角形で斜辺の長さを c, 残る二辺の長さを a, b とすると $a^2 + b^2 = c^2$ である.



証明方法は色々あるが, 次のような方針の証明が多くの教科書で述べられている: 一辺の長さが $a+b$ の正方形 ABCD を考え, 図のように点 P, Q, R, S をとる. 2 辺と間の角が等しいから, $\triangle$SPA と $\triangle$PQB は合同な三角形. よって PS = QP = c. また $\angle \mathrm{SPA} + \angle \mathrm{QPB} = \angle \mathrm{SPA} + \angle \mathrm{PSA} = 90°$. よって $\angle$SPQ は直角である. 同様にすると, 四角形 PQRS は一辺の長さが c の正方形であることが示される. 四

[2]先に紹介した, 逆の命題の証明と同様に補助線を引く証明も考えられる.

角形 ABCD の面積は, 正方形 PQRS, △SPA, △PQB, △QRC, △RSD の面積を合わせたものになるから

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right), \text{すなわち } a^2 + b^2 = c^2.$$

続いて空間図形などへの三平方の定理の応用が扱われるが, ここでは割愛する.

3　中学校数学の平面幾何における基本命題

前節でみたように, 教科書において, いくつかの命題は直観的に認め, いくつかの命題は直観的に認めた命題をもとに論証を行っている. また明示されていないが, 幾何学的直観により暗に成立を仮定している命題もある. 教科書中で実際に与えられた証明が論理的に完全になるためには, どのような基本命題の成立が仮定されているのかを明らかにすることが本節の目的である. ただし特別な場合のみに証明が行われて, 完全な証明が与えられているとはいえない場合でも, 少し修正すれば同じ方針で一般の場合も証明できるようなものは, ここでは問題としないことにする. また, 必ずしも仮定する基本命題の数を減らすことにはこだわらないものとする.

以下では特に断らない限り, “2 点” といえば, “相異なる 2 点”, “2 本の直線” といえば “相異なる 2 本の直線” という意味に解することとする. また平面幾何のみを考え, 実数は既知とする. 用語を確認する: 平面という全体集合があり, その要素を点という. 直線は平面のある特別な性質を持つ部分集合である. 点 A が直線 ℓ に含まれることを “直線 ℓ は点 A を通る”, “点 A は直線 ℓ 上の点である” などという. 以下は必ずしも明記されていないが暗黙のうちに仮定されていると考えるべきことである.

(A1) 与えられた 2 点を通る直線が, ただ 1 本のみ必ず引ける.

(A2) どの直線上にも少なくとも 2 点が必ずある. 平面には一直線上にはない少なくとも 3 点が存在する.

(A3) 直線上に 3 点 A, B, C があるとき, A が B, C の間にあるか, B が A, C の間にあるか, C が A, B の間にあるかのいずれか一つのみが必ず成立する (つまり直線上の点には順序がある). 直線 AB 上には点 C がとれて点 B が点 A, C の間にあるようにできる.

直線 AB 上にあって点 A, B の間にある点, 及び点 A, B からなる直線 AB の部分を線分 AB という.

(A4) 一直線上にない点 A, B, C と, 点 A, B, C のいずれも通らない直線 ℓ に対して, もし直線 ℓ が線分 AB と交わるならば, 線分 ℓ は線分 BC と線分 CA の一方のみと必ず交わる.

(B1) 線分にはそれに付随した長さが定まる (線分 AB の長さを AB と書く). さらに 線分 AB 上の点 A, B の間にある点 C に対して, AC + CB = AB が成立する.

(B2) 線分 PQ, 直線 ℓ, 直線 ℓ 上の点 A が与えられたとき, 直線 ℓ 上に 点 B, C がとれて, AB = AC = PQ かつ, 点 A は点 B, C の間にあるようにできる. 点 B, C の入れ替えを除いて, このような 2 点は一通りに決まる.

(A1) より, 2 本の直線は, 交わらないか, 1 点のみで交わるかのどちらかであることが分かる. 交わらないとき, 2 直線は平行であるという (先と同じく // という記号で表す). 以下では, 点 A が 点 B, C の間にあるというときには, 点 A, B, C は相異なる点であることも意味することにする.

直線 ℓ と, 直線 ℓ 上にない 2 点 A, B に対して, 直線 AB と直線 ℓ が交点を持ち, その交点が点 A, B の間にあるとき, 点 A, B は直線 ℓ の違う側にあるといい, そうでないときは同じ側にあるという.

直線 AB 上の点 C が点 A に関して点 B と同じ側にあるとは, 点 A が点 B, C の間にはないことをいう. 直線 AB 上で点 A に関して点 B と同じ側にある点全体を半直線 AB という. 点 A を半直線 AB の始点という.

次に角について考えよう. 一直線上にはない 3 点 O, A, B があるとき, 線分 OA と線分 OB で決まる角を ∠AOB (あるいは ∠BOA) と書く. 点 C が ∠AOB の内部にあるとは, 点 C は 半直線 OA 上にも, 半直線 OB 上にもなく, 点 B, C は直線 OA の同じ側にあり, 点 A, C は直線 OB の同じ側にあることをいう.

(B3) 角には付随した大きさがある (混乱を避けるため ∠AOB の大きさは [∠AOB] で表す). 点 A′, B′ をそれぞれ半直線 OA, OB 上の点 O とは異なる点とすると, [∠AOB] = [∠A′OB′] である. また, 点 C が ∠AOB の内部にあるとき, [∠AOB] = [∠AOC] + [∠BOC] が成立する.

(B4) ∠AOB, 直線 ℓ, 直線 ℓ 上の点 C, D が与えられたとき, 次の性質を満たす点 C を始点とする 2 本の半直線 m, n が存在する: 点 E, F を それぞれ m, n 上の C とは異なる点とすると, 点 E, F は直線 ℓ の反対側にあって, [∠ECD] = [∠FCD] = [∠AOB] となる. このような半直線 m, n は (この 2 つの入れ替えを除けば) 一意に決まる.

(B5) 点 C が ∠AOB の内部にあるとき, 線分 AB と半直線 OC は交わる.

(B5) は例えば, 二等辺三角形の 2 角が等しいことの証明に用いられている[3].

以上の公理のいくつかは, 図を見る限り直観的に成立があまりにも明らかに感じられるため, ユークリッドも見過ごしていたものである. ここではヒルベルトによる公理系 ([8]) を参考にしている.

さて, それでは中学校数学の教科書において証明なしに直観的に認めた命題をまとめよう. 合同の定義を厳密化するためには, "移動" の概念を導入して "きちんと重なる" とはどういう意味かを数学的に厳密に定義することが一つの方法である. ここでは, 扱う図形は多角形に限定して, 辺の長さや角が一致することを合同の定義としよう. 論証において直接用いられるのは, この性質だからである. 三角形に限定して, 合同の定義を述べると

- △ABC と △A′B′C′ が合同であるとは, $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$, $\mathrm{BC} = \mathrm{B'C'}$, $\mathrm{CA} = \mathrm{C'A'}$, $\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{B'A'C'}$, $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{A'B'C'}$, $\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{A'C'B'}$ が成立することをいう[4].

"線 (点) 対称" も同様に定義できるが, 演繹的論証に直接使われている場面がないので, 省略する.

平行線に関する公理は以下の通りである. 以下, 直線 ℓ, ℓ' は直線 m と交わっているものし, 同位角はこの m と交わってできるものとする.

(C1) $\ell \,/\!/\, \ell'$ ならば, 同位角は等しい.

(C2) 直線 ℓ, ℓ' の同位角が等しければ, $\ell \,/\!/\, \ell'$.

点 $\mathrm{O, A, B}$ も, 点 $\mathrm{O, B, C}$ も一直線上になく, 点 $\mathrm{A, O, C}$ が一直線上にあって, さらに点 O が点 $\mathrm{A, C}$ の間にあるとき, ∠BOC は ∠AOB の補角であるという. 補角の大きさがと自分自身の大きさが一致するような角を直角と呼ぶ.

見過ごしやすいが, 論証抜きに作図法のみが提示されていることも, 後の論証に使われていれば我々のリストに含めておく必要がある.

(D1) ∠AOB に対して, $\angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{COB}$ となるような点 C が ∠AOB の内部に存在する (角の二等分線の存在).

(D2) 直角が存在する (直角の大きさは 90° である).

(D3) $\angle b$ が $\angle a$ の補角のとき, $[\angle a] + [\angle b] = 180°$ である (あるいは $[\angle b] = 180° - [\angle a]$).

(D4) 直線 ℓ と (ℓ の上にない) 点 A に対し, A を通る ℓ に平行な直線が存在する.

(D3) は対頂角が等しいことを示すために用いられた式である[5]. (D4) は三角形の内角の和を求める際に使われている[6].

三角形の合同・相似条件も公理として仮定する:

(E1) 三辺相等な 2 つの三角形は合同である.

(E2) 二辺挟角相等な 2 つの三角形は合同である.

(E3) 一辺両端角相等な 2 つの三角形は合同である.

(E4) 三辺比相等な 2 つの三角形は相似である.

(E5) 二辺比挟角相等な 2 つの三角形は相似である.

(E6) 二角相等な 2 つの三角形は相似である.

最後にピタゴラスの定理を示すためには, 図形の面積という概念が必要である. 多角形に限定して述べよう.

(F1) 多角形に付随する (正の値を取る) 面積という量がある. 底辺の長さが a, 高さが b の三角形の面積は $ab/2$ である.

(F2) 合同な図形の面積は等しい. また多角形を 2 つの多角形に分けたとき, それぞれの多角形の面積をあわせたものが元の多角形の面積となる.

以上を用いると, 中学校数学における証明を論理の飛躍がないものとできる.

参考文献

[1] 中学校学習指導要領 (平成 10 年告示, 平成 15 年 12 月一部改正), 文部科学省.

[2] 小学校学習指導要領解説 算数編 平成 20 年 6 月, 文部科学省.

[3] 中学校学習指導要領 (平成 20 年告示, 平成 22 年 11 月一部改定), 文部科学省.

[4] 中学校学習指導要領解説 数学編 平成 20 年 7 月, 文部科学省.

[5] 未来へ広がる数学 1,2,3, 啓林館.

[6] 中学数学 1,2,3, 大阪書籍.

[7] 新編 新しい数学 1,2,3, 東京書籍, 平成 21 年 2 月.

[8] D. ヒルベルト, 幾何学基礎論, 中村幸四郎訳, ちくま学芸文庫, 筑摩書房, 2005 年.

[3] 実は (B5) は, (A1)–(A4) から証明できるが, ここでは簡単のために公理に入れておく.

[4] 頂点の対応は必ずしもこの順番でなくてもよい.

[5] (B3) での角には直線をなす場合は含めていないので別に述べた.

[6] (D4) は (B2) と (C2) から従うが, 教科書では二つの三角定規を使った "作図" が根拠とされているので公理に加えた.